秘密★启用前　　【考试时间：1月15日　15：00—17：00】

昆明市2024届高三“三诊一模”摸底诊断测试

数　学

注意事项：

1、答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡交回。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{2,6\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$

A．$\{1,2,3\}$　　B．$\{2,3,5\}$　　C．$\{1,3,5\}$　　D．$\{3,4,5\}$

2．复数 $\dfrac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知 F 是抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点，点 M 在 C 上，且 M 的纵坐标为3，则 $|MF|=$

A．$2\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．3　　D．

4．在 $\triangle ABC$ 中，点 D 满足 $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{DB}$，则

A．$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$　　B．$\overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

C．$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$　　D．$\overrightarrow{CD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$

5．某学校运动会男子 100m 决赛中，八名选手的成绩（单位：s）分别为：13.09，13.15，12.90，13.16，12.96，13.11，x，13.24，则下列说法错误的是

A．若该八名选手成绩的第 75% 百分位数为13.155，则 $x=13.15$

B．若该八名选手成绩的众数仅为13.15，则 $x=13.15$

C．若该八名选手成绩的极差为0.34，则 $12.90\le x\le 13.24$

D．若该八名选手成绩的平均数为13.095，则 $x=13.15$

6、已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x$，若存在 $x\in[0,2\pi]$，使得方程 $f(x)=m$ 有三个不等的实根 x_1，x_2，x_3 且 $x_1<x_2<x_3$，则 $x_3-x_2-x_1=$

A. 2π　　B. $\frac{3\pi}{2}$　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

7. 若将函数 $y=f(x)$ 的图象平移后能与函数 $y=g(x)$ 的图象重合，则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为“平行函数”．已知 $f(x)=2-\frac{1}{2^x+1}$，$g(x)=\frac{m\cdot 2^x}{2^x+2}$ 互为“平行函数”，则 $m=$

A、2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

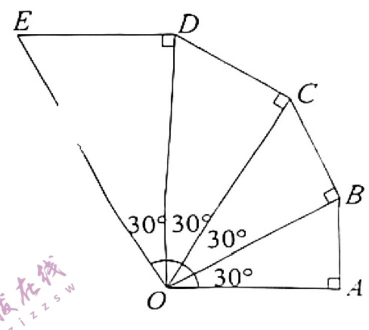
8、第七届国际数学大会（ICNE7）的会徽图案是由若干三角形组成的．如图所示，作 Rt$\triangle AOB$，$OA=1$，$\angle AOB=30°$，再依次作相似三角形 $\triangle BOC$，$\triangle COD$，$\triangle DOE$，……，直至最后一个三角形的斜边 OM 与 OA 第一次重叠为止．则所作的所有三角形的面积和为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}[(\frac{2\sqrt{3}}{3})^{11}-1]$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}[(\frac{4}{3})^{11}-1]$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}[(\frac{2\sqrt{3}}{3})^{12}-1]$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}[(\frac{4}{3})^{12}-1]$



二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 BD_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$，则

A. $AA_1=\sqrt{2}AB$

B. BD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$

C. $BD_1\perp DA_1$

D. $AB_1\perp$ 平面 BCD_1

10. 已知圆 $O:x^2+y^2=1$，直线 $l:x-y-4=0$，点 P 在直线 l 上运动，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点分别为 A，B，当 $\angle APB$ 最大时，则

A. 直线 AB 的斜率为 1

B. 四边形 $PAOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

C. $|AB|=\frac{\sqrt{14}}{2}$

D. $\sin\angle APB=\frac{\sqrt{7}}{8}$

11．古希腊数学家托勒密（Ptolemy 85-165）对三角学的发展做出了重要贡献，他研究出角与弦之间的对应关系，创造了世界上第一张弦表．托勒密用圆的半径的 $\frac{1}{60}$ 作为一个度量单位来度量弦长，将圆心角 α（$0^\circ<\alpha<360^\circ$）所对的弦长记为 $\text{crd}\,\alpha$．例如 60° 圆心角所对弦长等于 60 个度量单位，即 $\text{crd}60^\circ=60$．则

A． $\text{crd}30^\circ=30$

B． 若 $\text{crd}\alpha=120$，则 $\alpha=180^\circ$

C． $\text{crd}\alpha=60\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

D． $\text{crd}\alpha+\text{crd}\beta>\text{crd}(\alpha+\beta)$（$0^\circ<\alpha+\beta<360^\circ$）

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-|2x+1|, x<0,\\ e^x-1, x\geq 0,\end{cases}$ $g(x)=f(f(x))-f(x)-a$，则

A．当 $a=0$ 时，$g(x)$ 有 2 个零点

B．当 $a=\frac{3}{2}$ 时，$g(x)$ 有 2 个零点

C．存在 $a\in\mathbf{R}$，使得 $g(x)$ 有 3 个零点

D．存在 $a\in\mathbf{R}$，使得 $g(x)$ 有 5 个零点

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知角 θ 的顶点为坐标原点 O，始边与 x 轴的非负半轴重合，点 $A(1,a)$（$a\in\mathbf{Z}$）在角 θ 终边上，且 $|OA|\leq 3$，则 $\tan\theta$ 的值可以是________．（写一个即可）

14．春节前夕，某社区安排小王、小李等 5 名志愿者到三个敬老院做义工，每个敬老院至少安排 1 人，至多安排 2 人．若小王、小李安排在同一个敬老院，且这 5 名志愿者全部安排完，则所有不同的安排方式种数为________．（用数字作答）

15．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，以 F_2 为圆心作与 C 的渐近线相切的圆，该圆与 C 的一个交点为 P，若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形，则 C 的离心率为________．

16．已知球 O 的表面积为 36π，正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，则该正四棱锥 $P-ABCD$ 体积的最大值为________．

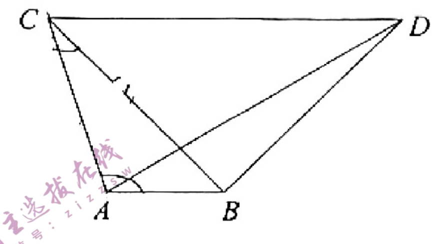
四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在$\triangle ABC$中，$\cos\angle BAC=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$AB=\sqrt{2}$.

（1）求$\triangle ABC$的面积；

（2）如图，$CD//AB$，$CB\perp BD$，求AD.



18.（12 分）

记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_n=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{4}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）在a_n与a_{n+1}之间插入n个数，使这$n+2$个数组成一个公差为d_n的等差数列，

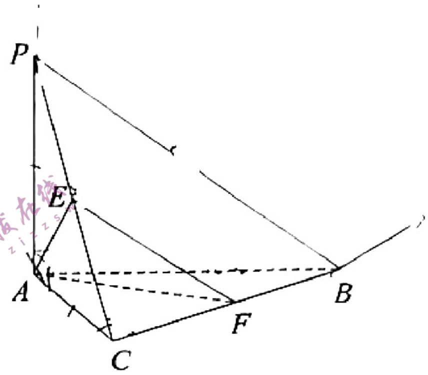
求数列$\{\frac{1}{d_n}\}$的前 2024 项和.

19.（12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，E 是线段 PC 的中点，F 是线段 BC 上一点，$PA=AC=\frac{1}{2}BC=1$，$PB=\sqrt{6}$．

（1）证明：平面 $AEF\perp$ 平面 PBC；

（2）是否存在点 F，使平面 AEF 与平面 ABC 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$？若存在，求 CF；若不存在，说明理由．



20.（12 分）

聊天机器人（chatterbot）是一个经由对话或文字进行交谈的计算机程序．当一个问题输入给聊天机器人时，它会从数据库中检索最贴切的结果进行应答．在对某款聊天机器人进行测试时，如果输入的问题没有语法错误，则应答被采纳的概率为 80%，若出现语法错误，则应答被采纳的概率为 30%．假设每次输入的问题出现语法错误的概率为 10%．

（1）求一个问题的应答被采纳的概率；

（2）在某次测试中，输入了 8 个问题，每个问题的应答是否被采纳相互独立，记这些应答被采纳的个数为 X，事件 $X=k$（$k=0,1,\cdots,8$）的概率为 $P(X=k)$，求当 $P(X=k)$ 最大时 k 的值．

21．（12 分）

已知 F 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点，点 $(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 在不过原点 O 的直线 l 上，l 交 C 于 A，B 两点．当 $\angle AOF$ 与 $\angle BOF$ 互补时，$|AB|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$|AF|+|BF|=2\sqrt{2}$．

（1）求 C 的方程；

（2）证明：$\frac{S_{\triangle AOB}}{\tan\angle AOB}$ 为定值．

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=(x^2-2ax)\ln x-\frac{1}{2}x^2+2ax$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a>0$ 时，若 $f(x)\geq\frac{1}{2}a^2(1-\ln a)$ 恒成立，求 a 的取值范围．