2023—2024学年第一学期期末调研试卷
高二数学

注意事项：

1. 本试卷共4页，满分150分，考试时间120分钟。答题前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知抛物线的标准方程是 $y^2=4x$，则它的准线方程是

A. $x=-1$　　B. $x=1$　　C. $y=-1$　　D. $y=1$

2. 已知 $A(2,-3,1)$，$B(2,0,3)$，$C(0,0,5)$，则 $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$

A. $(-1,3,3)$　　B. $(1,-3,-3)$　　C. $(1,3,1)$　　D. $(-1,-3,-1)$

3. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 a_3，a_7 为方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根，则 $a_5=$

A. $-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. -1　　D. 1

4. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1+a_2+a_3=1$，$a_2+a_3+a_4=2$，则 $S_6=$

A. 6　　B. 8　　C. 9　　D. 12

5. 已知圆 C_1：$x^2+y^2+2x=0$，圆 C_2：$x^2+y^2-2x-8=0$，则 C_1 与 C_2 的位置关系是

A. 相离　　B. 外切　　C. 相交　　D. 内切

6. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $2x-y=0$，且经过点 $A(3,2)$，则 C 的实轴长为

A. $2\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{7}$　　D. $4\sqrt{7}$

7. 已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线与 x 轴的交点为 A，点 B 在 C 上，且 $|AB|=\sqrt{2}|BF|$，则 $\triangle ABF$ 的面积是

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

8. 某汽车集团从2023年开始大力发展新能源汽车，2023年全年生产新能源汽车2000辆，每辆车的利润为1万元. 如果在后续的几年中，经过技术不断创新，后一年新能源汽车的产量都是前一年的120%，每辆车的利润都比前一年增加1000元，则生产新能源汽车6年的时间内，该汽车集团销售新能源汽车的总利润约为(假设每年生产的新能源汽车都能销售出去，参考数据：$1.2^6\approx2.99$)

A. 2.291亿　　B. 2.59亿　　C. 22.91亿　　D. 25.9亿

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知直线 l 的方向向量为(1,2)，且经过点(0,2)，则下列点中在直线 l 上的是

A. $(-1,0)$　　B. $(-2,-1)$　　C. $(1,4)$　　D. $(2,6)$

10. 已知四面体 $ABCD$，E，F 分别是 BC，CD 的中点，则 $\overrightarrow{EF}=$

A. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$　　B. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC})$

C. $\overrightarrow{AF}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$　　D. $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$

11. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与直线 l：$x-y+m=0$ 相交于两个不同的点 A，B，M 为线段 AB 的中点，则

A. $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$　　B. $m<-\sqrt{5}$ 或 $m>\sqrt{5}$

C. 弦长 $|AB|$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　D. M 一定在直线 $x+4y=0$ 上

12. 已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 A_1B_1 的中点，则

A. 存在直线 $l\subset$ 平面 $ABCD$，使得 $l\perp$ 平面 AEC_1

B. 存在直线 $l\subset$ 平面 $ABCD$，使得 $l /\!/$ 平面 AEC_1

C. 点 B 到平面 AEC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. BE 与平面 AEC_1 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1=1$，递推公式为 $a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_4=$__________.

14. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，点 $P(3,4,5)$ 在坐标平面 Oxy，Oxz 内的射影分别为点 A，B，则 $|\overrightarrow{AB}|=$__________.

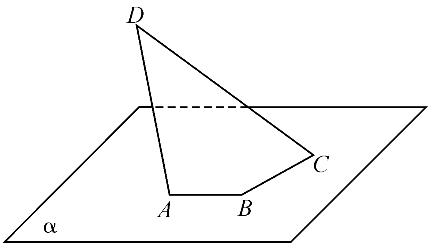
15. 已知圆 C：$x^2+(y-2)^2=4$，若直线 l：$mx-y+(m+1)=0(m\in\mathbf{R})$ 与圆 C 相交于两个不同的点 A，B，则 $|AB|$ 的最小值是__________.

16. 已知过双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左焦点 F_1 且倾斜角为 60° 的直线与 C 交于点 A，与 y 轴交于点 B，且 A 是 BF_1 的中点，则 C 的离心率为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)

如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$AD=5$，$\angle ABC=\angle BAD=120^\circ$，$AD\perp BC$.



(1)求 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$；

(2)求 CD 的长.

18.(12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_3-a_5=a_4=4$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求 S_n 的最大值及取得最大值时 n 的值.

19.(12 分)

已知圆心为 C 的圆经过 $A(2,-4)$，$B(-1,-1)$ 两点，且圆心 C 在直线 l：$2x+y=0$ 上.

(1)求圆 C 的标准方程；

(2)求与直线 AB 平行且与圆 C 相切的直线的方程.

20.(12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=0$，且 $a_{n+1}+2a_n=3n+1$.

(1)求证：$\{a_n-n\}$ 是等比数列；

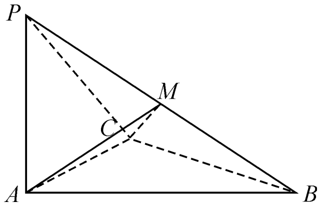
(2)求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21.（12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AP\perp$平面 ABC，$BC\perp PC$.

（1）求证：平面 $PAC\perp$平面 PBC；

（2）若 $AC=BC=AP$，M 是 PB 的中点，求平面 ACM 与平面 PBC 的夹角.



22.（12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F$ 为右焦点，A 为右顶点，B 为上顶点，$\dfrac{|BF|}{|AB|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求 C 的离心率 e；

（2）已知 MN 为 C 的一条过原点的弦（M，N 不同于点 A）.

（i）求证：直线 AM，AN 的斜率之积为定值，并求出该值；

（ii）若直线 AM，AN 与 y 轴分别交于点 D，E，且$\triangle ADE$ 面积的最小值为$\sqrt{3}$，求椭圆 C 的方程.