

考号
姓名
班级
学校
县(市、区)

2023 年秋季高中三年级期终质量评估

数 学 试 题

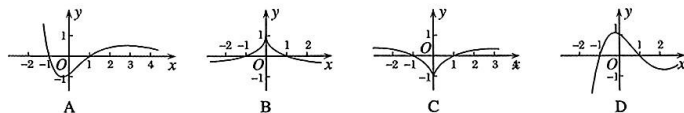
注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 考生做题时将答案答在答题卡指定的位置上, 在本试卷上答题无效.
2. 答题前, 考生务必先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
3. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂, 非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性(签字)笔或碳素笔书写, 字体工整, 笔迹清楚.
4. 请按照题号在各题的答题区域(黑色线框)内作答, 超出答题区域书写的答案无效.
5. 保持卷面整洁, 不折叠、不破损.

第 I 卷 选择题(共 60 分)

一、选择题(本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合 $A = \{1, 3, n\}$, $B = \{n^2, 1\}$, 且 $A \cup B = A$, 则实数 n 的值为
A. 0 B. 1 C. 0 或 $\pm\sqrt{3}$ D. $\pm\sqrt{3}$
2. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$, 若 $P(X \leq 1 - 2a) + P(X \leq 1 + a) = 1$, 则实数 a 的值为
A. -1 B. -2 C. 0 D. 2
3. 函数 $y = \frac{1-x^2}{e^x}$ 的图像大致为



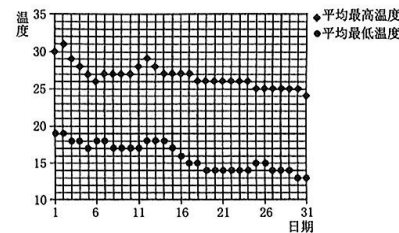
4. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=1, PB=2, PC=3$, 则当该三棱锥的体积最大时, 其外接球的表面积为
A. 12π B. 13π C. 14π D. 15π
5. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图像可以看作是由双曲线经过旋转得到的, 那么双曲线 $y = \frac{2}{x}$ 的焦距为
A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 4 D. 8
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_1=1, a_{n+1}=2S_n$, 则 $a_{2024} =$
A. 3^{2022} B. 3^{2023} C. 2×3^{2023} D. 2×3^{2022}
7. 抛物线 $E: y^2 = x$ 的焦点为 F , P 为准线上任意一点, 过点 P 作 E 的切线, 切点为 A , 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值为
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

8. 若函数 $f(x) = e^x - ax^2 - x$ 有两个不同的极值点, 则实数 a 的取值范围为
A. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$
C. $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

二、选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 设复数 $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的共轭复数为 \bar{z} , 则下列结论正确的有
A. $\bar{z} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{1}{2}$
C. $|\frac{\bar{z}}{z}| = 1$ D. $z^2 + \bar{z}^2 = 2$

10. 为了研究某种作物在特定温度下(要求最高气温 t 满足: $27^\circ\text{C} \leq t \leq 30^\circ\text{C}$) 的生长状况, 某农学家需要在 10 月份去某地进行为期 10 天的连续观察试验. 现有关于该地区近十年 10 月份日平均最高气温和日平均最低气温(单位: $^\circ\text{C}$) 的记录如下:



根据上述记录, 下列说法正确的有

- A. 农学家观察试验的起始日期为 10 月 7 日或 10 月 8 日
 - B. 设该地区今年 10 月上旬(10 月 1 日至 10 月 10 日)的最高气温的方差和最低气温的方差分别为 D_1, D_2 , 则 $D_1 < D_2$
 - C. 设该地区今年 10 月上旬(10 月 1 日至 10 月 10 日)的最高气温的方差和最低气温的方差分别为 D_1, D_2 , 则 $D_1 > D_2$
 - D. 从 10 月份的 31 天中随机选择连续 3 天, 则所选 3 天中日平均最高气温值都在 $[27, 30]$ 的概率为 $\frac{10}{29}$
11. 用一个平面去截正方体, 关于截面的说法, 正确的有
A. 截面有可能是三角形, 并且有可能是正三角形
B. 截面有可能是四边形, 并且有可能是正方形
C. 截面有可能是五边形, 并且有可能是正五边形
D. 截面有可能是六边形, 并且有可能是正六边形

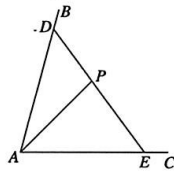
12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 2, & x \leq 0, \\ |\log_2 x|, & x > 0, \end{cases}$ 若关于 x 的函数 $g(x) = [f(x)]^2 - (a+2)f(x) + 2a$ 恰好有 n 个零点, 则下列说法正确的是
- A. 若 $n=2$, 则实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0)$
 B. 若 $n=3$, 则实数 a 的取值范围为 $(0, 1)$
 C. 若 $n=4$, 则实数 a 的取值范围为 $(0, 2) \cup (3, +\infty)$
 D. 若 $n=5$, 则实数 a 的取值范围为 $(2, 3]$

第 II 卷 非选择题 (共 90 分)

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. $(x - \frac{2}{x})^6$ 展开式中 x^4 的系数为 _____ . (用数字作答)
14. 若点 $(0, 1)$ 在圆 $x^2 + y^2 + 2ax + a = 0$ 的外部, 则实数 a 的取值范围为 _____ .

15. 某楼梯共有 10 个台阶, 小明在上楼梯的时候每步可以上 1 个或者 2 个台阶, 则小明不同的上楼方法共有 _____ 种. (用数字作答)



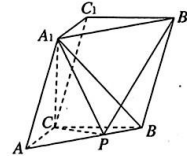
16. 如图, 点 P 为 $\angle BAC$ 内一点, $|PA|=1$, $\angle BAP=30^\circ$, $\angle CAP=45^\circ$, 过点 P 作直线分别交射线 AB, AC 于 D, E 两点, 则 $\frac{1}{|PD|} + \frac{1}{|PE|}$ 的最大值为 _____ .

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

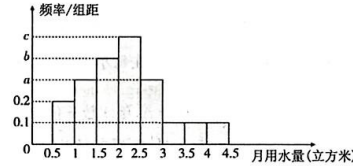
17. (本小题满分 10 分)
 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $m = (a, b)$, $n = (\sin B, -\sqrt{3} \cos A)$, 且 $m \cdot n = 0$.
- (1) 求内角 A 的大小;
 (2) 若 $a=10$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. (本小题满分 12 分)
 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$, 且 $\frac{a_{n+1} + a_n + 2}{a_n a_{n+1} + a_{n+1}} = -2$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n + 1}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .
- (1) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等差数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 设数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{7}{4}$.

19. (本小题满分 12 分)
 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=1$, $\angle ACB=120^\circ$, $AA_1=A_1B=2$, $\angle A_1AC=60^\circ$.
- (1) 证明: 平面 $ABC \perp$ 平面 A_1AC_1 ;
 (2) 若 $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, 求二面角 $C-A_1P-B_1$ 的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)
 某市市民用水拟实行阶梯水价, 每人月用水量不超过 w 立方米的部分按 4 元/立方米收费, 超出 w 立方米的部分按 10 元/立方米收费, 从该市随机调查了 100 位市民, 获得了他们某月的用水量数据, 整理得到如下频率分布直方图, 并且前四组频数成等差数列.



- (1) 求 a, b, c 的值及居民月用水量在 $2 \sim 2.5$ 内的频率;
 (2) 根据此次调查, 为使 80% 以上居民月用水价格为 4 元/立方米, 应将 w 至少定为多少? (精确到 0.01)
 (3) 若将频率视为概率, 现从该市随机调查 3 名居民的月用水量, 将月用水量不超过 2.5 立方米的人数记为 X , 求其分布列及均值.

21. (本小题满分 12 分)
 P 为平面直角坐标系内一点, 过 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 M , 交直线 $y = -\frac{b}{a}x$ ($a > b > 0$) 于 Q , 过 P 作 y 轴的垂线, 垂足为 N , 交直线 $y = -\frac{b}{a}x$ 于 R , 若 $\triangle OMQ, \triangle ONR$ 的面积之和为 $\frac{ab}{2}$.
- (1) 求点 P 的轨迹 C 的方程;
 (2) 若 $a=2, b=1, A(-4, 0), G(n, 0)$, 过点 G 的直线 l 交 C 于 D, E 两点, 是否存在常数 n , 对任意直线 l , 使 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ 为定值? 若存在, 求出 n 的值及该定值, 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)
 已知函数 $f(x) = ax \ln x$ ($a \neq 0$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.
- (1) 讨论函数 $g(x) = f'(x) + \frac{1}{x}$ 的单调性;
 (2) 当 $a=1$ 时, 求证: $f(x) < e^x + \sin x - 1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：
www.zizs.com](http://www.zizs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线