2024届高三年级TOP二十名校仿真模拟一·数学

参考答案、提示及评分细则

1. C　$z=i+(i^2)^2=1+i$，则$|z|=\sqrt{2}$. 故选C.

2. C　抛物线为$x^2=2y$，则$p=1$，焦点到顶点的距离为$\frac{1}{2}p=\frac{1}{2}$. 故选C.

3. B　由题知y的可能取值有$-3,-2,-1,0,1,2,3$，则集合A中有7个元素. 故选B.

4. A　因为$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=AC\cdot BC\cdot\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}AC\cdot BC=1$，所以$AC\cdot BC=\sqrt{2}$，则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin C=\frac{1}{2}$. 故选A.

5. D　由题知数列$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列，则$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=5(a_5+a_6)=5\times34=170$. 故选D.

6. B　题目可转化为将7个相同的元素分为3组，在7个位置之间的6个空中插入2个挡板，将7个位置分为3组，有$C_6^2=15$种方法. 故选B.

7. D　侧面展开图扇形的弧长为$2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，圆锥底边的半径r满足$2\pi r=\pi$，解得$r=\frac{1}{2}$，所以该圆锥轴截面是一个两腰长为2，底边长为1的等腰三角形，底边上的高为$\frac{\sqrt{15}}{2}$，设内切球半径为R，则$R(1+2+2)=1\times\frac{\sqrt{15}}{2}$，$R=\frac{\sqrt{15}}{10}$. 故选D.

8. C　令$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，当$x>0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减. 又因为在$\triangle ABC$中，$b\cos C+c\cos B>a\cos C+c\cos A$，所以$a>b$，由正弦定理得$x_1=x_2$，则$g(x_1)=g(x_2)$. 接着比较$x_2$与$x_3$的大小，即比较$\frac{\sin A}{A}$与$\frac{\sin B}{B}$的大小，令$h(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$h'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\tan x}{x^2}\cdot\cos x$. 令$m(x)=x-\tan x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$m'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}<0$，则$m(x)$单调递减，$m(x)<m(0)=0$，则$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，所以$h(A)<h(B)$，则$x_2<x_3$，所以$g(x_2)>g(x_3)$. 故选C.

9. AB　二项式系数之和为$C_5^0+C_5^1+\cdots+C_5^5=32$，A正确；设展开式第$k+1$项为$T_{k+1}=C_5^k(2x)^{5-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k$，最高次项的系数为$C_5^0\times2^5=32$，B正确；令$x=1$得各项系数之和为$1^5=1$，C错误；$x^{-1}$项的系数为$-C_5^3\cdot2^2=-40$，D错误. 故选AB.

10. ACD　易证$B_1C\perp$平面BEC_1，所以$B_1C\perp EC_1$，A正确；由平面A_1C_1D//平面AB_1C，$CE\cap AB_1C=C$，所以CE与平面A_1C_1D不平行，B错误；取D_1C_1的中点F，则菱形A_1ECF为所求截面，其面积为$\frac{1}{2}A_1C\cdot EF=\frac{\sqrt{6}}{2}$，C正确；由题可知$V_{E\text{-}BB_1C_1C}=V_{E\text{-}BB_1D_1D}=\frac{1}{6}$，D正确. 故选ACD.

11. BD　化简得$f(x)=\sin3x+\sqrt{2}\cos3x$，其最小正周期为$\frac{2\pi}{3}$，A错误；因为$f(x)=\sin3x+\sqrt{2}\cos3x=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin3x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos3x\right)$，则$f(x)=\sqrt{3}\sin(3x+\varphi)$，其中$\varphi$为锐角，$\tan\varphi=\sqrt{2}$，所以$f(x)\leqslant\sqrt{3}$，B正确；由$\tan\varphi=\sqrt{2}$得$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{3}$，因为$0<x<\frac{\pi}{12}$时，$\varphi<3x+\varphi<\frac{\pi}{4}+\varphi$，则函数$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$上先增后减，C错误；令$3x+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，得$x=\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{3}+\frac{k\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 则函数$f(x)$在$(0,\pi)$上有三个极值点$\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{3}$，$\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{3}$，$\frac{5\pi}{6}-\frac{\varphi}{3}$，D正

确. 故选 BD.

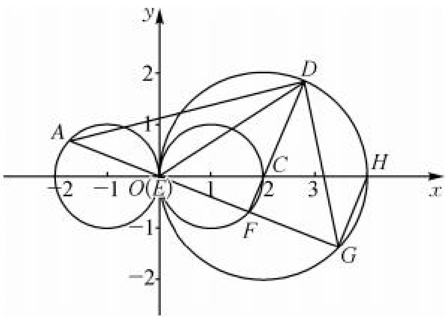
12. ABD　由题知 $f_{n+1}(x)=[f_n(x)]'$，则当 $f_1(x)=e^x$ 时，$f_n(x)=e^x$，A 正确；由 $(\sin x)'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，$(\cos x)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，$\left[\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{n+1}{2}\pi\right)$，$\left[\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]'=-\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{n+1}{2}\pi\right)$，B 正确；$f_1(x)=\frac{1}{ax+1}=(ax+1)^{-1}$，则 $f_{n+1}(x)=(-a)^n\cdot n!\cdot\frac{1}{(ax+1)^{n+1}}$，若 $f_{n+1}(x)>0$，则 $(-a)^n>0$ 恒成立，$a<0$，C 错误；$f_1(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$，由 C 知 $f_{n+1}(x)=(-1)^n\cdot\frac{2}{(1+x)^{n+1}}\cdot n!$，D 正确. 故选 ABD.

13. $\frac{5}{2}$　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=5-2\mu=0$，所以 $\mu=\frac{5}{2}$.

14. 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　当焦点在 x 轴上时，由渐近线方程 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$；当焦点在 y 轴上时，由渐近线方程得 $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15. $f(x)=1-2^{|x|}$（答案不唯一，满足题意即可）　函数 $f(x)=1-2^{|x|}$ 为偶函数且 $f(x)<1$，其最大值为 0.

16. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　以 E 为坐标原点，EC 为 x 轴正方向建立平面直角坐标系，则 $B(-1,0)$，$C(2,0)$，A 在圆①：$(x+1)^2+y^2=1$ 上，D 在圆②：$(x-2)^2+y^2=4$ 上，作圆③：$(x-1)^2+y^2=1$，延长 AE 交圆③于点 F，则 $|AE|=|EF|$，所以 $S_{\triangle AED}=S_{\triangle DEF}$. 设直线 AE 与圆②交于点 G，取 $H(4,0)$，连接 CF，GH，得 $\triangle CEF\backsim\triangle HEG$，则 $\frac{EF}{EG}=\frac{EC}{EH}=\frac{1}{2}$，则 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle DEG}$，$\triangle DEG$ 为圆②内接三角形，当且仅当 $\triangle DEG$ 为正三角形时，$S_{\triangle DEG}$ 最大，此时 $S_{\triangle DEG}=3\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle DEF}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $S_{\triangle AED}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



17. 解：(1)不妨设 $AB=5$，$BC=7$，$AC=8$，则 B 是最大内角. ………… 1 分

由余弦定理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{49+25-64}{2\times5\times7}=\frac{1}{7}$， ………… 3 分

则 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$. ………… 5 分

(2)$d=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$ ………… 6 分

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CB}^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CB}|\cos B}$ ………… 8 分

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{25+49+10}=\sqrt{21}$. ………… 10 分

18. 解：(1)由题意知 $D(H)=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(H_i-\overline{H})^2=2$，

所以 $\sum_{i=1}^{20}(H_i-\overline{H})^2=40$，同理 $\sum_{i=1}^{20}(Y_i-\overline{Y})^2=40$， ………… 3 分

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{20}(H_i-\overline{H})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(H_i-\overline{H})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(Y_i-\overline{Y})^2}}$$ ………… 4 分

$=\frac{38}{40}=0.95.$ ………………………………………………………………………… 6 分

(2)$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}(H_i-\overline{H})(Y_i-\overline{Y})}{\sum\limits_{i=1}^{20}(H_i-\overline{H})^2}=0.95.$ ……………………………………………………… 7 分

$\overline{Y}=\frac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}Y_i=62.8$, ………………………………………………………………………… 8 分

$\overline{H}=\frac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}H_i=4$,则 $\hat{a}=\overline{Y}-\hat{b}\overline{H}=59$,$\hat{Y}=0.95H+59$, ………………………………………… 10 分

当 $H=6$ 时,$\hat{Y}=64.7$,即可预测 $H=6$ 时体质测试成绩为 64.7. …………………………… 12 分

19. (1)证明:当 $n=1$ 时,$A_1+B_1=2C_1$,即 $a_1+b_1=2c_1$; ………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时,$A_{n-1}+B_{n-1}=2C_{n-1}$,

所以$(A_n-A_{n-1})+(B_n-B_{n-1})=2(C_n-C_{n-1})$,

即 $a_n+b_n=2c_n(n\geqslant 2)$, ………………………………………………………………………… 3 分

综上,$a_n+b_n=2c_n$ 成立. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)解:因为 $n\in\mathbf{N}^*$,$a_n=2n\cdot 3^{n-1}>0$,$b_n>0$,所以 $a_n+b_n=2c_n\geqslant 2\sqrt{a_nb_n}$,

所以 $c_n^2\geqslant a_nb_n$. ………………………………………………………………………… 5 分

又 $c_n^2\leqslant a_nb_n$,所以 $c_n^2=a_nb_n$, ………………………………………………………… 6 分

此时 $a_n=b_n=c_n=2n\cdot 3^{n-1}$,

$C_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=2\times 3^0+4\times 3^1+\cdots+2n\cdot 3^{n-1}$, ①

$3C_n=2\times 3^1+\cdots+(2n-2)3^{n-1}+2n\cdot 3^n$, ② ……………………………………………… 8 分

①−②得 $-2C_n=2\times(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})-2n\cdot 3^n$

$=2\cdot\frac{1\times(1-3^n)}{1-3}-2n\cdot 3^n=(1-2n)\cdot 3^n-1$, ………………………………………… 10 分

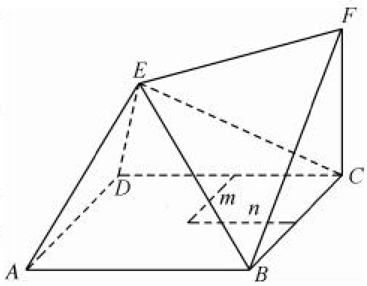
所以 $C_n=\frac{2n-1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明:在平面 $ABCD$ 内分别作直线 $m\perp CD$,$n\perp BC$,因为平面 $CDEF$ $\perp$平面 $ABCD$,平面 $CDEF\cap$平面 $ABCD=CD$,$m\subset$平面 $ABCD$,

所以 $m\perp$平面 $CDEF$,又 $FC\subset$平面 $CDEF$,所以 $m\perp FC$. ………… 3 分

同理可证 $n\perp FC$,又 $m,n\subset$平面 $ABCD$,且 m,n 为相交直线,

所以 $FC\perp$平面 $ABCD$. ………………………………………………… 5 分



(2)解:取 BC 中点 G,连接 BD,DG,易得$\triangle BCD$ 为等边三角形,所以 $DG\perp DA$,以 D 为原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DG}$为 x,y 轴正方向建立空间直角坐标系,

因为$\overrightarrow{DC}=(-1,\sqrt{3},0)$,平面 $CDEF\perp$平面 $ABCD$,

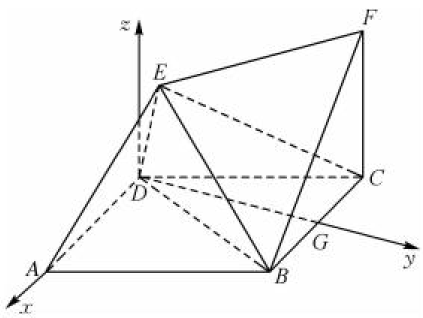
所以可设 $E(a,-\sqrt{3}a,h)$,$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$为平面 ADE 的法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x=0,\\ ax-\sqrt{3}ay+hz=0,\end{cases}$取 $y=h$,

得 $\boldsymbol{n}_1=(0,h,\sqrt{3}a)$. ………………………………………………… 8 分

由(1)知 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$为平面 BCF 的一个法向量,

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{h}{\sqrt{h^2+3a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,



又 $DE=\sqrt{h^2+4a^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，所以 $h=\frac{3}{2}$， ………………………………………… 10 分

所以 $V_{E\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$. ………………………………………… 12 分

21. (1)解：因为 $f(4)=\frac{1}{2}+2\ln 2$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$，$f'(4)=\frac{1}{8}$， ………………………… 1 分

所以切线方程为 $y-\frac{1}{2}-2\ln 2=\frac{1}{8}(x-4)$，即 $l(x)=\frac{1}{8}x+2\ln 2$. ………………………… 3 分

(2)证明：设切点为 $\left(x_0,\frac{2}{x_0}+\ln x_0\right)$，则 $b-\frac{2}{x_0}-\ln x_0=\left(\frac{1}{x_0}-\frac{2}{x_0^2}\right)(a-x_0)$，

即 $\left(\frac{1}{x_0}-\frac{2}{x_0^2}\right)a+\frac{4}{x_0}+\ln x_0-1-b=0$. ………………………………………… 5 分

令 $g(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)a+\frac{4}{x}+\ln x-1-b$，知 $g(x)$ 有 3 个零点. ………………………… 6 分

$g'(x)=a\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{(x-4)(x-a)}{x^3}$，

令 $g'(x)=0$ 得 $(x-4)(x-a)=0$，

当 $a\leqslant0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,4)$ 上单调递减，在 $(4,+\infty)$ 上单调递增，此时 $f(x)$ 至多有两个零点，不合题意；

当 $0<a<4$ 时，$g(x)$ 在 $(0,a)$，$(4,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,4)$ 上单调递减， ………………… 8 分

$g(a)=\frac{2}{a}+\ln a-b=f(a)-b$，$g(4)=\frac{1}{8}a+2\ln 2-b=l(a)-b$， ………………………… 9 分

由 $g(a)>g(4)$ 知，$g(a)>0>g(4)$. ………………………………………… 10 分

所以 $l(a)<b<f(a)$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)设 $z=a+bi$，则 $Z(a,b)$，

所以 $\sqrt{(a-1)^2+b^2}+\sqrt{(a+1)^2+b^2}=4$， ………………………………………… 1 分

整理得 $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{3}=1$，即 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 3 分

(2)由题意知，直线 Z_1Z_2 的斜率不为 0，设 Z_1Z_2：$x=ty+1$，$Z_1(x_1,y_1)$，$Z_2(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=ty+1,\\3x^2+4y^2-12=0,\end{cases}$ 得 $(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，$\Delta=36t^2+36(3t^2+4)>0$，

所以 $y_1+y_2=\frac{-6t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3t^2+4}$. ① ………………………………………… 6 分

由 BF 平分 $\angle Z_1BZ_2$ 知 $\frac{|BZ_1|}{|Z_1F|}=\frac{|BZ_2|}{|Z_2F|}$，即 $\left|\frac{y_1}{y_2}\right|=\frac{\sqrt{x_1^2+(y_1-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{x_2^2+(y_2-\sqrt{3})^2}}$，

又 $x^2=4-\frac{4}{3}y^2$，则 $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2=\frac{-\frac{1}{3}y_1^2-2\sqrt{3}y_1+7}{-\frac{1}{3}y_2^2-2\sqrt{3}y_2+7}$， ………………………… 8 分

整理得 $7(y_1+y_2)=2\sqrt{3}y_1y_2$， ………………………………………… 9 分

代入①式得 $42t=18\sqrt{3}$，所以 $t=\frac{3\sqrt{3}}{7}$. ………………………………………… 11 分

所以直线 Z_1Z_2 的方程为 $x=\frac{3\sqrt{3}}{7}y+1$. ………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线