

2023~2024 学年度第一学期期末学业水平诊断

高三数学

注意事项:

1. 本试题满分 150 分, 考试时间为 120 分钟.
2. 答卷前, 务必将姓名和准考证号填涂在答题纸上.
3. 使用答题纸时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写, 要字迹工整, 笔迹清晰; 超出答题区书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.

1. 设集合 $U = \mathbb{R}$, 集合 $M = \{x | x < 0\}$, $N = \{x | |x-1| < 2\}$, 则 $\complement_U(M \cup N) =$

- A. $\{x | x \geq 3\}$ B. $\{x | x > 3\}$ C. $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 0\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 0\}$

2. “直线 $x \sin \theta + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ 与 $x + y \cos \theta + 1 = 0$ 平行” 是 “ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $a > b > 0$, $c > 0$ 且 $c \neq 1$, 则

- A. $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ B. $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$ C. $c^a > c^b$ D. $a^c > b^c$

4. 已知 $|a| = |b| = 1$, $(a+b) \cdot (a-3b) = -3$, 则向量 a 与 b 夹角的大小为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 我国古代十进制数的算筹记数法是世界数学史上一个伟大的创造. 算筹一般为小圆棍. 算筹计数法的表示方法为: 个位用纵式, 十位用横式, 百位再用纵式, 千位再用横式, 以此类推; 遇零则置空. 纵式和横式对应数字的算筹表示如右表所示, 例如: 10 记为

数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式						⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥
横式	—	==	≡	≡≡	≡≡≡	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥

“—”, 62 记为 “⊥||”. 现从由 4 根算筹

表示的两位数中任取一个数, 则取到的数字为质数的概率为

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{10}$

6. 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$, 则

方程 $f(x) - 1 = 0$ 实数根的个数为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

高三数学试题 (第 1 页, 共 4 页)

7. 已知 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点, 过点 F 作 C 的一条渐近线的

垂线, 垂足为 A , 直线 AF 与 C 的另外一条渐近线交于点 B . 若 $\overline{BF} = 3\overline{AF}$, 则双曲线 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3

8. 已知函数 $f(x) = e^x + x - 2$, $g(x) = \ln x + x - 2$, 若 $\exists x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 则 $x_1 x_2$ 的最小值为

- A. $-e$ B. -1 C. $-\frac{1}{e}$ D. $-\frac{1}{e^2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数为 \bar{x} , 则数据 $x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}$

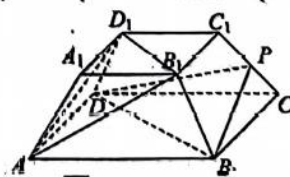
- A. 与原数据的极差相同 B. 与原数据的中位数相同
C. 与原数据的方差相同 D. 与原数据的平均数相同

10. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin 2x$ 的图象, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称
C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 上单调递增 D. 当 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

11. 如图, 在正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2A_1B_1 = 2AA_1 = 4$, P 为棱 CC_1 上一点, 则

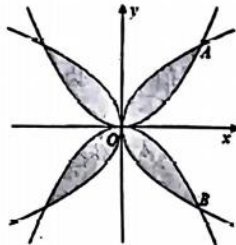
- A. 不存在点 P , 使得直线 $BP \parallel$ 平面 AB_1D_1
B. 当点 P 与 C_1 重合时, 直线 $CC_1 \perp$ 平面 BPD
C. 当 P 为 CC_1 中点时, 直线 BP 与 AD 所成角的余弦值为 $\frac{7\sqrt{13}}{26}$
D. 当 P 为 CC_1 中点时, 三棱锥 $A - A_1B_1D_1$ 与三棱锥 $P - BCD$ 的体积之比为 1:2



高三数学试题 (第 2 页, 共 4 页)

12. 我国著名数学家华罗庚先生说:“就数学本身而言,是壮丽多彩、千姿百态、引人入胜的……认为数学枯燥乏味的人,只是看到了数学的严谨性,而没有体会到数学的内在美。”

图形美是数学美的重要方面.如图,由抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 分别逆时针旋转 90° 、 180° 、 270° 可围成“四角花瓣”图案(阴影区域),则

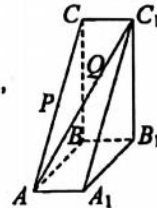


- A. 开口向下的抛物线的方程为 $x^2 = -2py$
- B. 若 $|AB| = 8$, 则 $p = 2$
- C. 设 $p = 1$, 则 $t = 1$ 时, 直线 $x = t$ 截第一象限花瓣的弦长最大
- D. 无论 p 为何值, 过点 B 且与第二象限花瓣相切的两条直线的夹角为定值

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

- 13. $(x-3)(2x+1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为_____.
- 14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_5 = 25$ 且 $a_8 = 15$, 则 a_1 的值为_____.
- 15. 若存在两个不相等正实数 x, y , 使得 $e^x - e^y = a(y-x)(y+x)$, 则实数 a 的取值范围为_____.

- 16. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, $AB = BC = 5$, $AA_1 = 2$, 则该三棱柱外接球的表面积为_____; 若点 P 为线段 AC 的中点, 点 Q 为线段 AC_1 上一动点, 则平面 BPQ 截三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 所得截面面积的最大值为_____。(本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

- 17. (10 分) 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\frac{(2a-b)\sin A}{\cos B} = a \tan C$.
 - (1) 求 C ;
 - (2) 若 $a = 3$, $c = \sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

- 18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + m$, 且 $S_1, S_3 - 2, S_7$ 成等比数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $b_n = \frac{a_n}{2^{a_n+1}}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n < \frac{5}{9}$.

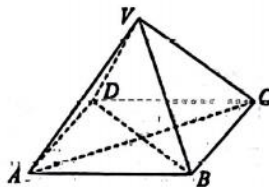
高三数学试题 (第 3 页, 共 4 页)

19. (12分) 如图, 四棱锥 $V-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$,

平面 $VBD \perp$ 底面 $ABCD$.

(1) 求证: $AC \perp VD$;

(2) 若 $VB = 2$, 且四棱锥 $V-ABCD$ 的体积为 2, 求直线 VC 与平面 VAB 所成角的正弦值.



20. (12分) 某学校计划举办趣味投篮比赛, 比赛分若干局进行. 每一局比赛规则如下: 两人组成一个小组, 每人各投篮 3 次; 若某选手投中次数多于未投中次数, 则称该选手为“好投手”; 若两人均为“好投手”, 则称该小组为本局比赛的“神投手组合”. 假定每位参赛选手均参加每一局的比赛, 每人每次投篮结果互不影响. 若甲、乙两位同学组成一个小组参赛, 且甲、乙同学的投篮命中率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$.

(1) 求在一局比赛中甲被称为“好投手”的概率;

(2) 若以“甲、乙同学组成的小组获得‘神投手组合’的局数为 3 的概率最大”作为决策依据, 试推断本次投篮比赛设置的总局数 $n (n \geq 4)$ 为多少时, 对该小组更有利?

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{ax^2+x}{x+1} (a < 1)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求证: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \ln 2 (n \in \mathbb{N}^*)$.

22. (12分) 已知 P 为曲线 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{n} = 1 (n > 1)$ 上任意一点, 直线 PM, PN 与圆

$x^2 + y^2 = 1$ 相切, 且分别与 C 交于 M, N 两点, O 为坐标原点.

(1) 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}$ 为定值, 求 n 的值, 并说明理由;

(2) 若 $n = \frac{4}{3}$, 求 $\triangle PMN$ 面积的取值范围.

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注齐鲁家长圈微信号：sdgkjzq。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索