

郑州市 2023—2024 学年上学期期末考试

高一数学 评分参考

一、单选题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	C	C	A	B	D

二、多选题（每小题 5 分，共 20 分，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有的选错得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	AB	BC	ABC	ACD

三、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$; 14. $-\frac{\pi}{3}$; 15. 0; 16. $(-4, -3]$.

四、解答题（17 题 10 分，18-22 题每小题 12 分，共 70 分）

17. 解：由诱导公式可得， $\sin \alpha = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha) = -2\cos \alpha$,5 分

则 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{-2\cos \alpha + \cos \alpha}{-2\cos \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{3}$10 分

18. 解：(1) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\log_2 3 \cdot \log_3 4 - \lg 100 = \frac{5}{4}$6 分

(2) $\because a + a^{-1} = 3, \therefore a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2 = 9 - 2 = 7$12 分

19. 解：(1) $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调递增.1 分

理由如下：对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，2 分

$$f(x_1) - f(x_2) = a - \frac{2}{e^{x_1} + 1} - \left(a - \frac{2}{e^{x_2} + 1}\right) = \frac{2}{e^{x_2} + 1} - \frac{2}{e^{x_1} + 1} = \frac{2(e^{x_1} - e^{x_2})}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)}. \quad \text{.....3 分}$$

因为 $y = e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，且 $x_1 < x_2$ ，所以 $e^{x_1} < e^{x_2}$ ，即 $e^{x_1} - e^{x_2} < 0$ ，

所以 $f(x_1) < f(x_2)$ ，5 分

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调递增.6 分

(2) 假设存在实数 a ，使函数 $f(x)$ 为奇函数.7 分

则 $f(-x) + f(x) = a - \frac{2}{e^{-x} + 1} + a - \frac{2}{e^x + 1} = 2a - \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1} = 2a - 2 = 0$,9 分

解得 $a = 1$,11 分

故存在实数 a 使函数 $f(x)$ 是奇函数.12 分

20. 解析: (1)由题可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{1}{2} \\ &= \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \cos 2x - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \\ &= \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$3 分

由 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 得 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

所以该函数图象的对称轴方程为 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$6 分

(2)由题可得

$$g(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} + 1 = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\cos 2x + \frac{1}{2}. \quad \text{.....9 分}$$

$\because x \in \left(-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right), \therefore 2x \in \left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right),$

$\therefore \cos 2x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right] \therefore g(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]$ 12 分

21. 解析: (1) 由题意, 不等式 $f(x) \leq 2$ 对于一切实数 x 恒成立,

等价于 $x^2 - (a-1)x + a \geq 0$ 对于一切实数 x 恒成立,2 分

所以 $(a-1)^2 - 4a \leq 0$,

解得 $3 - 2\sqrt{2} \leq a \leq 3 + 2\sqrt{2}$5 分

(2)不等式 $f(x) > 0$ 等价于 $x^2 - (a-1)x + a - 2 < 0 \Leftrightarrow [x - (a-2)](x-1) < 0$6 分

当 $a-2 > 1$ 即 $a > 3$ 时, 不等式可化为 $1 < x < a-2$,

原不等式的解集 $\{x|1 < x < a-2\}$;

当 $a-2=1$ 即 $a=3$ 时, 不等式可化为 $(x-1)^2 < 0$,

原不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $a-2 < 1$ 即 $a < 3$ 时, 不等式可化为 $a-2 < x < 1$,

此时 $\{x|a-2 < x < 1\}$11 分

综上所述: ①当 $a < 3$ 时, 不等式的解集为 $\{x|a-2 < x < 1\}$;

②当 $a=3$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

③当 $a > 3$ 时, 不等式的解集为 $\{x|1 < x < a-2\}$12 分

22. (1)由题可知

$$\begin{aligned} f(x) &= 15W(x) - 20x - 10x \\ &= 15W(x) - 30x \\ &= \begin{cases} 15 \times 5(x^2 + 3) - 30x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 15 \times \left(50 - \frac{50}{x+1}\right) - 30x, & 2 < x \leq 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 75x^2 - 30x + 225, & 0 \leq x \leq 2, \\ 750 - \frac{750}{x+1} - 30x, & 2 < x \leq 5. \end{cases} \end{aligned} \quad \text{.....5分}$$

(2)解: 由(1)得

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 75x^2 - 30x + 225, & 0 \leq x \leq 2, \\ 750 - \frac{750}{x+1} - 30x, & 2 < x \leq 5, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 75\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 222, & 0 \leq x \leq 2, \\ 780 - 30\left[\frac{25}{1+x} + (1+x)\right], & 2 < x \leq 5, \end{cases} \end{aligned} \quad \text{.....8分}$$

当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x)_{\max} = f(2) = 465$;

当 $2 < x \leq 5$ 时, $f(x) = 780 - 30\left[\frac{25}{1+x} + (1+x)\right] \leq 780 - 30 \times 2\sqrt{\frac{25}{1+x} \cdot (1+x)} = 480$;

(当且仅当 $\frac{25}{1+x} = 1+x$ 时, 即 $x=4$ 时等号成立.)

因为 $465 < 480$, 所以当 $x=4$ 时, $f(x)_{\max} = 480$.

所以当施用肥料为 4 千克时，种植该果树获得的最大利润是 480 元12 分

