金科大联考·2024届高三12月质量检测

数学

全卷满分150分，考试时间120分钟.

注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2．请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区城内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3．选择题用2B铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑；非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚.

4．考试结束后，请将试卷和答题卡一并上交.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2-4x+3\le 0\right\},B=\left\{y\middle|y=2^x+1\right\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$[1,+\infty)$　　C．$(1,3)$　　D．$[1,3)$

2．已知 $\mathrm{i}(z-1)=z+1$，则 $\bar{z}=$（　　）

A．$-\mathrm{i}$　　B．$1-\mathrm{i}$　　C．i　　D．$1+\mathrm{i}$

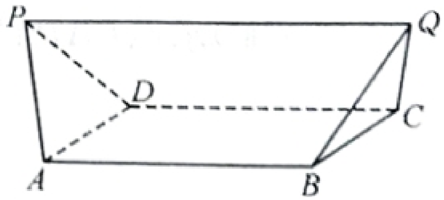
3．已知 $\vec{a},\vec{b}$ 为单位向举，若 $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\perp\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)$，则 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=$（　　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{1}{5}$　　D．$-\frac{1}{5}$

4．若函数 $f(x)=\frac{a\sin x}{1+\mathrm{e}^x}-\sin x$ 为偶函数，则实数 $a=$（　　）

A．1　　B．0　　C．-1　　D．2

5．刍薨是《九章算术》中出现的一种几何体，如图所示，其底面 $ABCD$ 为矩形，顶棱 PQ 和底面平行，书中描述了刍薨的体积计算方法：求积术曰，倍下袤，上袤从之，以广乘之，又以高乘之，六而一，即 $V=\frac{1}{6}(2AB+PQ)BC\cdot h$（其中 h 是刍薨的高，即顶棱 PQ 到底面 $ABCD$ 的距离），已知 $AB=2BC=4,\triangle PAD$ 和 $\triangle QBC$ 均为等边三角形，若二面角 $P-AD-B$ 和 $Q-BC-A$ 的大小均为 $150°$，则该刍薨的体积为（　　）



A. $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$　　B. $3\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$　　D. $4\sqrt{3}$

6. 若 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-3,\tan\beta=3$，则 $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=$（　　）

A. -1　　B. $\dfrac{7}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

7. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q,a_1>0$，设甲：$q>1$；乙：$a_{n+2}>a_n$，则（　　）

A. 甲是乙的充分不必要条件　　B. 甲是乙的必要不充分条件

C. 甲是乙的充要条件　　D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 已知双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，点 $P(2,0),Q(3,0)$，若 C 上存在三个不同的点 M 满足 $|MQ|=2|MP|$，则 C 的离心率的取值范围为（　　）

A. $\left(1,\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$　　B. $\left(1,\dfrac{\sqrt{30}}{3}\right)$　　C. $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(\dfrac{\sqrt{30}}{3},+\infty\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知圆 $C_1:(x+2)^2+y^2=1$，圆 $C_2:x^2+(y-a)^2=9$，则下列结论正确的是（　　）

A. 若 C_1 和 C_2 外离，则 $a>2\sqrt{3}$ 或 $a<-2\sqrt{3}$

B. 若 C_1 和 C_2 外切，则 $a=\pm2\sqrt{3}$

C. 当 $a=0$ 时，有且仅有一条直线与 C_1 和 C_2 均相切

D. 当 $a=2$ 时，C_1 和 C_2 内含

10. 已知正实数 x,y 满足 $x+4y=xy$，则（　　）

A. $xy\le16$　　B. $x+y\ge9$

C. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{16}$ 的最大值为 0　　D. 4^x+4^y 的最小值为 2^{10}

11．已知 $f(x)=\log_2 x+x, g(x)=2^x+x$，若 $f(a)=g(b)=2$，则（　　）

A．$a=2^b$　　　　B．$a+b=2$　　　　C．$a-b>1$　　　　D．$\frac{3}{4}<ab<2\sqrt{2}-2$

12. 在三棱锥 A_1-ABC 中，$A_1A\perp$ 平面 $ABC, AB\perp AC, AA_1=AB=AC=3, P$ 为 $\triangle A_1BC$ 内的一个动点（他括边界），AP 与平面 A_1BC 所成的角为 $45°$，则（　　）

A．A_1P 的最小值为 $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　　　B．A_1P 的最大值为 $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

C．有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BC$　　　　D．所有满足条件的线段 AP 形成的曲面面积为 $\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．设 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $3a_2=a_4$，则 $\frac{S_{2023}}{a_{2023}}=$______.

14．已知函数 $f(x)=\ln(ax+1)$，且 $y=2x$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条切线，则 $a=$______.

15．设 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，O 为坐标原点，M 为 C 上一个动点，且 $\left|\overrightarrow{MF_1}\right|^2+2\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{F_1O}$ 的取值范围为 $[1,3]$，则椭圆 C 的长轴长为______.

16．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，若 $f(x)\le f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，且 $f(0)+f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$，则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=$______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，面积为 S，且 $S=\frac{abc}{4}$.

（1）求 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径；

（2）若 $b+c=2$，且 $A=\frac{2\pi}{3}$，求 BC 边上的高.

18．（本小题满分 12 分）设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$\frac{S_1}{1}+\frac{S_2}{2}+\cdots+\frac{S_n}{n}=2^n-1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

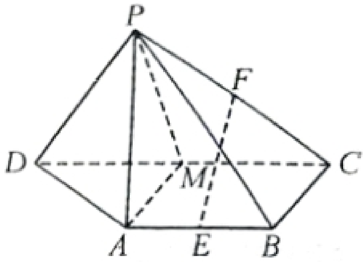
（2）设 $b_n=\frac{n+2}{na_n}$，证明：$b_1+b_2+\cdots+b_n<4$.

19．（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x^2-ax-a), a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a\geq 0$ 时，设 x_1,x_2 分别为 $f\left(x\right)$ 的极大值点、极小值点，求 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$ 的取值范围.

20.（木小题满分 12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB/\!/CD, AB\perp BC, 2AB=2BC=CD=PD=PC$，设 E,F,M 分列为棱 AB,PC,CD 的中点.



（1）证明：$EF/\!/$ 平面 PAM；

（2）若 $PA=PM$，求 EF 与平面 PCD 所成角的正弦值.

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f\left(x\right)=x^2\ln x-2\ln x+ax^2-\frac{1}{2}, a\in\mathbf{R}$.

（1）证明：$f\left(x\right)$ 有唯一的极值点；

（2）若 $f\left(x\right)\geq 0$，求 a 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0), F$ 为 C 的焦点，$P\left(4,y_0\right)\left(y_0>0\right)$ 在 C 上，且 $\left|PF\right|=5$.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）若直线 l 与 C 交于 A,B 两点（A,B 分别位于直线 $x=4$ 的两侧），且直线 PA,PB 的斜率之和为 0，

（i）求直线 l 的斜率；

（ii）求 $\triangle PAB$ 的面积的最大值.