

高 2024 届学业质量调研抽测 (第一次)

数学试卷

(数学试题卷共 6 页, 考试时间 120 分钟, 满分 150 分)

注意事项:

- 答卷前, 考生务必将自己的学校、姓名、考号填写在答题卡指定位置上.
- 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡指定位置上. 写在本试卷上无效.
- 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并收回.

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

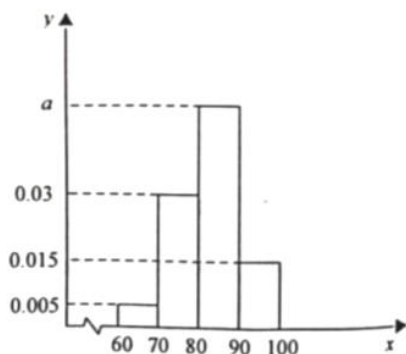
1. 若复数 z 满足 $z \cdot (1+i) = 2-i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z + \bar{z}$ 等于 ()

- A. i B. $-i$ C. 1 D. -1

2. 已知集合 $A = \{x \mid -2x^2 + 5x + 3 \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid |x| \leq 2\}$, 则 $A \cap B$ 的真子集个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

3. 2023 年 10 月 31 日, 神州十六号载人飞船返回舱在东风着陆场成功着陆, 激发了学生对航天的热爱. 某校组织高中学生参加航天知识竞赛, 现从中随机抽取 100 名学生成绩的频率分布直方图如图所示, 设这组样本数据的 75% 分位数为 x , 众数为 y , 则 ()



- A. $x = 88, y = 90$ B. $x = 83, y = 90$ C. $x = 83, y = 85$ D. $x = 88, y = 85$

4. 英国著名数学家布鲁克·泰勒 (Taylor Brook) 以微积分学中将函数展开成无穷级数的定理著称于世. 泰勒提出了适用于所有函数的泰勒级数, 泰勒级数用无限连加式来表示一个函数, 如: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$,

其中 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. 根据该展开式可知, 与 $2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \dots$ 的值最接近的是 ()

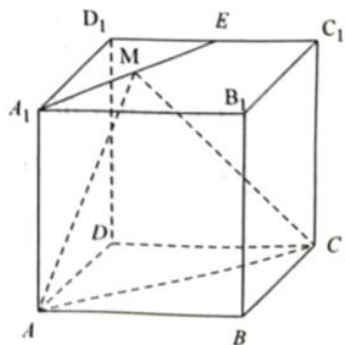
- A. $\sin 2^\circ$ B. $\sin 24.6^\circ$ C. $\cos 24.6^\circ$ D. $\cos 65.4^\circ$
5. 已知某社区居民每周运动总时间为随机变量 X (单位: 小时), 且 $X \sim N(5.5, \sigma^2)$, $P(x > 6) = 0.2$. 现从该社区中随机抽取 3 名居民, 则至少有两名居民每周运动总时间为 5 至 6 小时的概率为 ()
- A. 0.642 B. 0.648 C. 0.722 D. 0.748
6. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 且 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 则关于 x 的不等式 $f(x^2) + f(2x) \geq 0$ 的解集为 ()
- A. $[-2, 0]$ B. $[0, 2]$ C. $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$
7. 过点 P 作圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4\sqrt{3}y + 15 = 0$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 若 $\triangle PAB$ 为直角三角形, O 为坐标原点, 则 $|OP|$ 的取值范围为 ()
- A. $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ B. $(4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$
- C. $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$ D. $[4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}]$
8. 2023 年杭州亚运会吉祥物组合为“江南忆”, 出自白居易的“江南忆, 最忆是杭州”, 名为“琮琤”、“莲莲”、“宸宸”的三个吉祥物, 是一组承载深厚文化底蕴的机器人为了宣传杭州亚运会, 某校决定派 5 名志愿者将这三个吉祥物安装在学校科技广场, 每名志愿者只安装一个吉祥物, 且每个吉祥物至少有一名志愿者安装, 若志愿者甲只能安装吉祥物“宸宸”, 则不同的安装方案种数为 ()
- A. 50 B. 36 C. 26 D. 14

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $3^a = 5^b = 15$, 则下列结论正确的是 ()
- A. $\lg a > \lg b$ B. $a + b = ab$ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{2}\right)^b$ D. $a + b > 4$
10. 已知函数 $f(x) = e^x + x^3 - 2x^2 - ax$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不同零点的充分不必要条件可以是 ()
- A. $e - 2 < a < e - 1$ B. $e - 1 < a < e$ C. $e < a < e + 1$ D. $e + 1 < a < e + 2$
11. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F, O 为坐标原点, 其准线与 x 轴交于点 M , 经过点 M 的直线 l 与抛物线交于不同两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则下列说法正确的是 ()
- A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 5$
- B. 存在 $\angle AMF = 50^\circ$
- C. 不存在以 AB 为直径且经过焦点 F 的圆

D. 当 $\triangle ABF$ 的面积为 $4\sqrt{2}$ 时, 直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$

12. 如图, 在边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 C_1D_1 的中点, M 是线段 A_1E 上的一点, 则下列说法正确的是 ()



A. 当 M 点与 A_1 点重合时, 直线 $AC_1 \subset$ 平面 ACM

B. 当点 M 移动时, 点 D 到平面 ACM 的距离为定值

C. 当 M 点与 E 点重合时, 平面 ACM 与平面 CC_1D_1D 夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

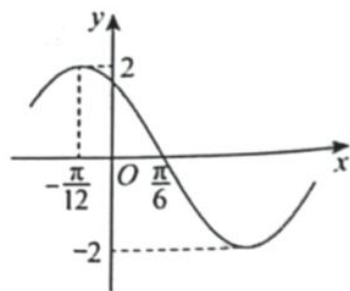
D. 当 M 点为线段 A_1E 中点时, 平面 ACM 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面面积为 $\frac{7\sqrt{33}}{32}$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{a}-2\vec{b}|=5$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

14. 已知 $f(x) = 2a \sin \omega x \cdot \cos \omega x + b \cos 2\omega x$, ($\omega > 0, a > 0, b > 0$) 的部分图象如图所示, 当 $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ 时,

$f(x)$ 的最大值为 _____.



15. 已知点 F 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 过坐标原点作一条倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线交椭圆于 P, Q 两

点, $|\overline{FP} + \overline{FQ}| = |\overline{FP} - \overline{FQ}|$, 则该椭圆的离心率为_____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 1$, 记 $T_n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$, 则 $T_n =$ _____;

若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 3T_n - 20n - 3$, 则 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ 的最小值是_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ABC$ 为钝角, $AB = BC = 2, CD = 4$, $\sin \angle BCD = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

(I) 求 $\cos \angle BDC$;

(II) 设点 E 为 AD 的中点, 求 BE 的长.

18. (本小题满分 12 分)

已知首项为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 前 n 项和为 S_n , 满足 $S_4 = S_1 \cdot S_2$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 令 $b_n = 4\cos(n\pi) \cdot \frac{n+1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

实现“双碳目标”是党中央作出的重大战略决策, 新能源汽车、电动汽车是重要的战略新兴产业, 对于实现“双碳目标”具有重要的作用. 为了解某市电动汽车的销售情况, 调查了该市某电动汽车企业近 6 年产值情况, 数据如下表所示:

年份	2018	2019	2020	2021	2022	2023
编号 x	1	2	3	4	5	6
产值 y /百万辆	9	18	30	51	59	80

(I) 若用模型 $y = a \cdot e^{bx}$ 拟合 y 与 x 的关系, 根据提供的数据, 求出 y 与 x 的经验回归方程 (精确到 0.01);

(II) 为了进一步了解车主对电动汽车的看法, 从某品牌汽车 4S 店当日 5 位购买电动汽车和 3 位购买燃油汽车的车主中随机选取 4 位车主进行采访, 记选取的 4 位车主中购买电动汽车的车主人数为 X , 求随机变量 X 的分布列与数学期望.

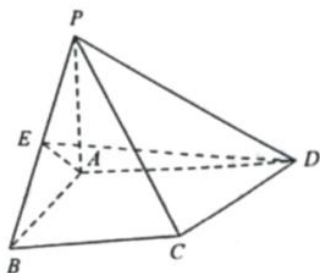
参考数据: $\sum_{i=1}^6 u_i = 20.88, \sum_{i=1}^6 x_i u_i = 80.58$, 其中 $u_i = \ln y_i$.

参考公式: 对于一组数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3, \dots, n)$, 其经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率截距的最小二乘估计分

别为 $b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = AP$, $AB \perp AD$, $AB + AD = 6$, $CD = \sqrt{2}$, $\angle CDA = 45^\circ$.



(I) 若 E 为 PB 的中点, 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 ADE ;

(II) 若平面 PAB 与平面 PCD 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(i) 求线段 AB 的长;

(ii) 设 G 为 $\triangle PAD$ 内 (含边界) 的一点, 且 $GB = 2GA$, 求满足条件的所有点 G 组成的轨迹的长度.

21. (本小题满分 12 分)

已知点 M 为圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 上任意一点, $B(-2, 0)$, 线段 MB 的垂直平分线交直线 MC 于点 Q .

(I) 求 Q 点的轨迹方程;

(II) 设过点 C 的直线 l 与 Q 点的轨迹交于点 P , 且点 P 在第一象限内. 已知 $A(-1, 0)$, 请问是否存在常数 λ , 使得 $\angle PCA = \lambda \angle PAC$ 恒成立? 若存在, 求 λ 的值, 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

(I) 已知函数 $f_n(x) = (x+n)e^x$, ($x \in \mathbf{N}^+$, e 为自然对数的底数), 记 $f_n(x)$ 的最小值为 a_n , 求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i > \frac{1}{e - e^2};$$

(II) 若对 $\forall x \in (1, +\infty)$, $a(e^{ax} + 1) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

