山东名校考试联盟

2024年2月高三年级下学期开学考数学试题

参考答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	C	B	B	D	A	D

6.【解析】由题意得，$f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $x=1$ 处的切线为 $y=\mathrm{e}x$，设该直线与曲线 $g(x)=\ln x+a$ 相切的切点为 $(x_0,\ln x_0+a)$，$g'(x_0)=\frac{1}{x_0}=\mathrm{e}$，所以 $x_0=\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以切点 $(\frac{1}{\mathrm{e}},a-1)$ 在直线 $y=\mathrm{e}x$ 上，所以 $a=2$，故选：D.

7.【解析】圆 $C:(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 的圆心为 $(-1,-1)$ 半径为1，点 C 到直线 $l:x+y+4=0$ 的距离 $d=\frac{|-1-1+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

解法一： $|PA|=|PB|=\sqrt{|PC|^2-1}$，设 $\angle APB=2\theta$，则在 $Rt\triangle PAC$ 中，$\sin\theta=\frac{AC}{PC}=\frac{1}{PC}$，

所以 $\cos\angle APB=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-\frac{2}{PC^2}$，所以

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|PA||PB|\cos\angle APB=(PC^2-1)(1-\frac{2}{PC^2})=(PC^2+\frac{2}{PC^2})-3$，

因为 $PC_{\min}=\sqrt{2}$，所以 $(PC^2+\frac{2}{PC^2})_{\min}=3$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值0.

解法二： 当 $CP\perp l$ 时，$\angle APB$ 取得最大值 $\frac{\pi}{2}$，此时 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 取得最小值0，其他位置 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}>0$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值0.

故选：A.

8.【解析】**解法一：** 由题意得，$\angle F_1PF_2=90°$，$OP=OF_1$，$\angle POF_2=2\theta=2\angle PF_1O$，

$\tan\angle POF_2=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{24}{7}$，所以 $\tan\theta=\tan\angle PF_1O=\frac{3}{4}$，即 $\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{3}{4}$，

又 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $|PF_1|=8a$，$|PF_2|=6a$．在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由勾股定理得：

$(8a)^2+(6a)^2=(2c)^2$，解得 $e^2=25$，所以双曲线 C 的离心率为5.

解法二： 点 P 一定在右支上，不妨设点 P 在第一象限，由于 $\tan\angle POF_2=\dfrac{24}{7}$，所以 $P\left(\dfrac{7c}{25},\dfrac{24c}{25}\right)$，

一定满足 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，即 $\dfrac{\left(\dfrac{7c}{25}\right)^2}{a^2}-\dfrac{\left(\dfrac{24c}{25}\right)^2}{b^2}=1$，

化简得，$49b^2c^2-576a^2c^2=625a^2b^2$，

结合 $c^2=a^2+b^2$，整理得，$49c^4-2\times625a^2c^2+625a^4=0$，同除 a^4 得，

$49e^4-2\times625e^2+625=0$，解得，$e^2=25$ 或 $e^2=\dfrac{25}{49}$（舍），所以双曲线 C 的离心率为 5，

故选：C.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11
答案	BC	ABD	ACD

10.【解析】对于 A：因为周期 $T=\pi$，$\omega>0$，所以 $\omega=2$．

对于 B：代入 $(\dfrac{2\pi}{3},-1)$ 得 $\sin(\dfrac{4\pi}{3}+\varphi)=-1$，所以 $\dfrac{4\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

则 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，则 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，其对称轴为

$x=\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的对称轴.

对于 C：因为 $f^2(x)-(a+1)f(x)+a=0$，所以 $f(x)=1$ 或 $f(x)=a$，

因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以令 $t=2x+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6})$，所以 $\sin t=1$ 或 $\sin t=a$ 有两个解，

结合 $y=\sin t$ 的图象，$y=1$ 与 $y=\sin t$ 有一个交点，$y=\dfrac{1}{2}$ 与 $y=\sin t$ 有一个交点，共两个交点，所以 $a=\dfrac{1}{2}$ 符合题意，答案错误。

对于 D：$g(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\dfrac{1}{4}\cos2x+\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}(\dfrac{2\sqrt{39}}{13}\sin2x+\dfrac{\sqrt{13}}{13}\cos2x)+\dfrac{1}{4}$，

令 $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{39}}{13},\sin\theta=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，所以 $g(x)=\dfrac{\sqrt{13}}{4}\sin(2x+\theta)+\dfrac{1}{4}$.

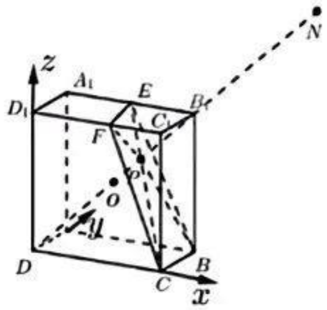
所以当 $2x+\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时取到最大值，此时 $\sin2x=\sin(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

答案：ABD

11.【解析】

对于 A：因为 M 为 A_1D 的中点，E 为 A_1B_1 的中点，所以 $DB_1// EM$，所以 $DB_1//$ 面 BEM，

则 P 到面 BEM 的距离为定值，所以体积为定值.



对于 B：AP 在平面 ABB_1A_1 的投影为 AB_1，由三垂线定理得，若 $AP\perp BE$，则 $AB_1\perp BE$，因为四边形 ABB_1A_1 为正方形，所以 AB_1 与 BE 不垂直，所以 B 错.

对于 C：平面 PCD 与平面 B_1CD 重合，平面 B_1CD 与平面 DCB_1A_1 重合，所以延长 CP 会与 A_1B_1 有交点，因为 $\overline{DP}=\frac{2}{3}\overline{DB_1}$，所以延长 CP 与 A_1B_1 交于点 E，取 C_1D_1 中点 F，则平面 PBC 截长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面为矩形 $BCFE$，所以面积为 $\sqrt{5}$.

对于 D：长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 外接球球心为 B_1D 中点，半径为 $\frac{3}{2}$，$\overline{DP}=\frac{2}{3}\overline{DB_1}$，由阿氏球得，在直线 B_1D 上必存在一点 N，使得 $3QP=QN$，此时点 N 在 DB_1 延长线上，且满足 $B_1N=3$，以 D 为原点，建系如图，$DB_1=3, DN=6$ 所以 $\overline{DN}=2\overline{DB_1}$，则 $N(4,2,4)$，因为 $E(1,1,2)$，所以 $(QE+3QP)_{\min}=(QE+QN)_{\min}=NE=\sqrt{14}$.答案：ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. $\frac{2}{3}$；　　13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$；　　14. $[0,e]$.

13.【解析】**解法一：** 由正弦定理得，$\sin B(1+\cos A)=\sin A(2-\cos B)$，

化简得，$\sin B+\sin B\cos A=2\sin A-\sin A\cos B$，

所以 $\sin B+\sin B\cos A+\sin A\cos B=\sin B+\sin(A+B)=\sin B+\sin C=2\sin A$

由正弦定理得 $b+c=2a$，因为 $b=c=2$，所以 $\triangle ABC$ 为正三角形，

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，$2R=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

解法二： 由余弦定理得，$b(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})=a(2-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})$，化简得 $b+c=2a$，

因为 $b=c=2$，所以 $\triangle ABC$ 为正三角形，

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得 $2R=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

14.【解析】只需保证$\frac{x^a}{e^x}-2\ln\frac{x^a}{e^x}-1\geqslant0$恒成立.

令$g(x)=x-2\ln x-1$，则$g(x)$在$(0,2)$上递减，在$(2,+\infty)$上递增，

当$x\to+\infty$时$g(x)\to+\infty, g(3)=2-2\ln3<0$，故存在$x_0>3$，使得$g(x_0)=0$.

又$g(1)=0$，故$0<\frac{x^a}{e^x}\leqslant1$或$\frac{x^a}{e^x}\geqslant x_0$恒成立.

又当$x\to+\infty$时$\frac{x^a}{e^x}\to0$，则$\frac{x^a}{e^x}\geqslant x_0$不恒成立，于是$0<\frac{x^a}{e^x}\leqslant1$恒成立.

当$a<0$时，若$x\to0$，显然不成立；

当$a=0$时，满足题意；

当$a>0$时，$a\ln x\leqslant x$，若$0<x\leqslant1$，显然成立；

若$x>1$时，则$a\leqslant\frac{x}{\ln x}$恒成立，求导可得$0<a\leqslant e$.

综上所述，实数a的取值范围为$[0,e]$.

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 【解析】

因为$a_{n+1}=a_n+2n$，所以$a_n=a_{n-1}+2(n-1)$ ……………………………………1分

$a_{n-1}=a_{n-2}+2(n-2)$，$\cdots a_2=a_1+2$， ……………………………………3分

累加得：$a_n=a_1+2\frac{(n-1)n}{2}=n^2-n+1$， ……………………………………5分

经检验$n=1$时符合，所以$a_n=n^2-n+1$ ……………………………………6分

【注：丢掉对$n=1$的检验不扣分】

（2）因为$b_n=(-1)^n(a_n+n-1)$，所以$b_n=(-1)^n(n^2-n+1+n-1)=(-1)^n n^2$， ………8分

所以$S_{2n}=-1^2+2^2-3^2+4^2+\cdots-(2n-1)^2+(2n)^2=1+2+3+\cdots+2n=2n^2+n$ …………13分

【注：此处没有使用并项法求和，而是使用不完全归纳法得出规律求和，不扣分】

16. 【解析】（1）记A表示甲以3:2获胜，则前4局两人比分为2:2平，第5局甲获胜，

所以$P(A)=C_4^2\times(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$； ……………………………………5分

【注：没有列出式子，直接给出答案，扣3分】

（2）X的可能取值为3，4，5 ……………………………………6分

$P(X=3)=C_2^1(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{4}$， ……………………………………8分

$P(X=4)=C_2^1\cdot C_3^2\times(\frac{1}{2})^4=\frac{3}{8}$， ……………………………………10 分

$P(X=5)=C_2^1\cdot C_4^2\times(\frac{1}{2})^5=\frac{3}{8}$， ……………………………………12 分

故 $E(X)=3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}=\frac{33}{8}$； ……………………………………15 分

【注：1.不列出分布列的表格，不扣分；

2. 没有单独给出随机变量的取值，后面求概率时有体现，不扣分；

3. 每一个概率值的计算只有结果没有式子，各扣 1 分；

4. 数学期望只有结果，没有式子，扣 1 分；

5. 结果没有化成最简分数，不扣分】

17. 【解析】

（1）证明：连接 AC，过 A 做 BC 的垂线交 BC 于点 F，……………………………………1 分

所以 $BF=1$，因为 $AB=2$，所以 $AF=\sqrt{3}$， ……………………………………2 分

又因为 $FC=3$，所以 $AC=2\sqrt{3}$，所以 $\angle BAC=90°$，所以 $AB\perp AC$ ……………………3 分

因为 $PA\perp$面 $ABCD$， $AC\subset$面 $ABCD$，所以 $AC\perp PA$，

PA 与 AB 交于点 A，所以 $AC\perp$面 PAB， ……………………………………………5 分

因为 $AC\subset$面 PAC，所以面 $PAB\perp$面 PAC ……………………………………………6 分

【注：1. 此处缺少 $AC\perp$面 PAB，直接得面 $PAB\perp$面 PAC，扣 1 分；

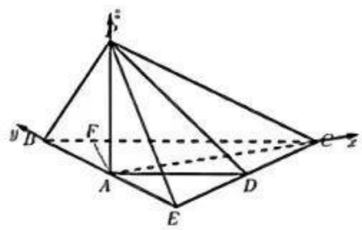
2. 证得 $PA\perp$面 $ABCD$ 后建系，由两平面的法向量垂直得两平面垂直也同样得分】

（2）延长 BA，CD 交于点 E，

因为 $E\in$面 PAB，且 $E\in$面 PCD，所以 $E\in l$，

PE 即为面 PAB 与面 PCD 的交线， ……………………………………8 分

以 A 为原点建系如图：



$B(0,2,0)$，$C(2\sqrt{3},0,0)$，$E(0,-2,0)$，$P(0,0,2)$，

$\overrightarrow{PB}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{PC}=(2\sqrt{3},0,-2)$，$\overrightarrow{PE}=(0,-2,-2)$，………10 分

设面 PCB 的方向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

5

则 $\begin{cases}2y-2z=0\\2\sqrt{3}x-2z=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$， ……………………………………12 分

设直线 l 与平面 PCB 的夹角为 α，所以

$\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{PE},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PE}||\vec{n}|}\right|=\left|\dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}\right|=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$， ………………………14 分

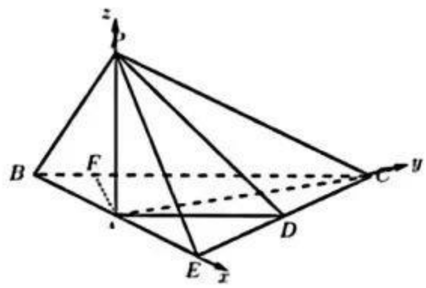
所以直线 l 与平面 PCB 夹角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ……………………………………15 分

解法二:延长 BA , CD 交于点 E，

因为 $E\in$ 面 PAB，且 $E\in$ 面 PCD，所以 $E\in l$，

PE 即为面 PAB 与面 PCD 的交线 ……………………………………8 分

如图建立空间直角坐标系：



$B(-2,0,0)$，$C(0,2\sqrt{3},0)$，$E(2,0,0)$，$P(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{PC}=(0,2\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{PE}=(2,0,-2)$，

……………………………………10 分

设面 PCB 的方向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}-2x-2z=0\\2\sqrt{3}y-2z=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$， ……………………………………12 分

设直线 l 与平面 PCB 的夹角为 α，

所以 $\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{PE},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PE}||\vec{n}|}\right|=\left|\dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}\right|=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$， ………………………14 分

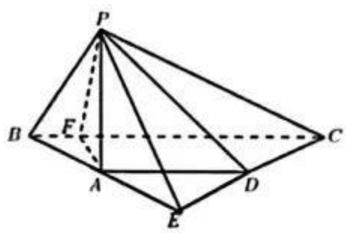
所以直线 l 与平面 PCB 夹角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ……………………………………15 分

解法三：延长 BA , CD 交于点 E，因为 $E\in$ 面 PAB，且 $E\in$ 面 PCD，所以 $E\in l$，

PE 即为面 PAB 与面 PCD 的交线 ……………………………………8 分

做 $AF\perp BC$ 于点 F，连接 PF，因为 $PA\perp$ 面 $ABCD$，由三垂线定理可知：$BC\perp PF$.

在 $Rt\triangle PAF$ 中，$AF=\sqrt{3}$, $PA=2$，所以 $PF=\sqrt{7}$.



设点 E 到平面 PBC 的距离为 h，由 $V_{E-PBC}=V_{P-BCE}$，得

$h=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$， ……………………………………10 分

因为 $PA\perp$ 面 $ABCD$，所以在 $Rt\triangle PAE$ 中，$PE=2\sqrt{2}$．……………………………12 分

设 PE 与平面 PBC 得夹角为 α，则 $\sin\alpha=\frac{h}{PE}=\frac{\sqrt{42}}{7}$，……………………………14 分

所以直线 l 与平面 PCB 夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$．……………………………15 分

18．【解析】

（1）由题意可知 $F(x)=ax-\ln(x+1)$，则 $F(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，………1 分

$F'(x)=a-\frac{1}{x+1}=\frac{ax+a-1}{x+1}$ ……………………………………………2 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$F'(x)=a-\frac{1}{x+1}<0$，则 $F(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减；……………4 分

当 $a>0$ 时，若 $-1<x\leqslant\frac{1-a}{a}=\frac{1}{a}-1$，$F'(x)=\frac{ax+a-1}{x+1}\leqslant 0$；

若 $x>\frac{1}{a}-1$，$F'(x)=\frac{ax+a-1}{x+1}>0$，

则 $F(x)$ 在 $(-1,\frac{1}{a}-1]$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a}-1,+\infty)$ 上单调递增．………………6 分

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$F(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$F(x)$ 在 $(-1,\frac{1}{a}-1]$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a}-1,+\infty)$ 上单调递增．

（2）（i）函数 $g(x)=(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})-\ln(2+\frac{1}{x})$，则 $g(1)=2\ln 2-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$，

$g(-2)=-\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}=-\ln\frac{3}{4}=\ln\frac{4}{3}$，故 $g(1)-g(-2)=0$．………………8 分

（ii）函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$．若存在 m，使得曲线 $y=g(x)$ 关于直线 $x=m$ 对称，则 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ 关于直线 $x=m$ 对称，所以 $m=-\frac{1}{2}$ ………………10 分

由 $g(-1-x)=(-x)\ln\left(1+\frac{1}{-1-x}\right)-\ln\left(2+\frac{1}{-1-x}\right)$ ……………… ………………12 分

$=-x\ln\frac{x}{x+1}-\ln\frac{2x+1}{x+1}=x\ln\frac{x+1}{x}-\ln\frac{2x+1}{x+1}=(1+x)\ln\frac{x+1}{x}-\ln\frac{x+1}{x}-\ln\frac{2x+1}{x+1}$ ………14 分

$=(1+x)\ln\frac{x+1}{x}-\ln\frac{2x+1}{x}=g(x)$ ……………………………………………………16 分

可知曲线 $y=g(x)$ 关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称．…………… ………………17 分

【注：1．由（i）的计算结果猜想得出对称轴为直线 $x=-\frac{1}{2}$，也得 2 分；

2．只要出现 $g(-1-x)=g(x)$ 或 $g(-\frac{1}{2}+x)=g(-\frac{1}{2}-x)$ 或两者做差等于 0 等式子，即得 2 分；

3. 没有最后一句结论，不扣分】

19. 【解析】

（1）由题意可知 $A(-2,1)$，求导得 $y'=\frac{x}{2}$，则切线 $A'B'$ 的方程为 $y=x-1$，B' 为切线 $A'B'$ 与 y 轴的交点，则点 B' 的坐标为 $(0,-1)$． ……………………3 分

【注：求导正确得 1 分；正确求解点 C 或 A 处的切线得 1 分；正确求得点 B' 的坐标得 1 分】

（2）设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right),B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right),C\left(x_3,\frac{x_3^2}{4}\right)$，

则抛物线在点 A 处的切线 $B'C'$ 的方程为 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$，

同理可得切线 $A'C'$ 的方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$， ……………………………4 分

联立可得交点 $C'\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)$．

同理可得 $A'\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{x_2x_3}{4}\right)$，$B'\left(\frac{x_3+x_1}{2},\frac{x_3x_1}{4}\right)$． ……………………………5 分

设垂心 H 的坐标为 (x,y)，则 $k_{A'C'}=\dfrac{\frac{x_1x_2}{4}-\frac{x_2x_3}{4}}{\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_2+x_3}{2}}=\frac{x_2}{2}$，$k_{B'H}=\dfrac{y-\frac{x_3x_1}{4}}{x-\frac{x_3+x_1}{2}}$．

由 $A'C'\perp B'H$ 可知 $k_{A'C'}\cdot k_{B'H}=\frac{x_2}{2}\cdot\dfrac{y-\frac{x_3x_1}{4}}{x-\frac{x_3+x_1}{2}}=-1$，

即 $2x+x_2y=x_3+x_1+\frac{x_1x_2x_3}{4}$． ……………………………7 分

【注：出现斜率之积为-1，即得 1 分】

同理可得 $2x+x_3y=x_1+x_2+\frac{x_1x_2x_3}{4}$．

两式相减可得 $(x_3-x_2)y=x_2-x_3$，即 $y=-1$．

因此垂心 H 在定直线 $y=-1$ 上． ……………………………………………9 分

【注：出现定直线 $y=-1$，即得 1 分】

（3）直线 AB 的方程为 $y=\frac{x_1+x_2}{4}x-\frac{x_1x_2}{4}$，$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{x_1+x_2}{4}\right)^2}\,|x_2-x_1|$， ………10 分

点 $C\left(x_3,\frac{x_3^2}{4}\right)$ 到直线 AB 的距离为

$$d_1=\frac{\left|\frac{x_1x_3+x_2x_3}{4}-\frac{x_3^2}{4}-\frac{x_1x_2}{4}\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{x_1+x_2}{4}\right)^2}}=\frac{|(x_3-x_2)(x_3-x_1)|}{4\sqrt{1+\left(\frac{x_1+x_2}{4}\right)^2}},$$ ……………………………………11 分

则三角形 ABC 的面积 $S_1=\frac{1}{2}|AB|\cdot d_1=\frac{1}{8}|(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)|$. ………………12 分

再由切线 $B'C'$ 的方程为 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$，$A'\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{x_2x_3}{4}\right)$，$B'\left(\frac{x_3+x_1}{2},\frac{x_3x_1}{4}\right)$，$C'\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)$

可知 $|B'C'|=\sqrt{1+\left(\frac{x_1}{2}\right)^2}\left|\frac{x_3+x_1}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{x_1}{2}\right)^2}|x_3-x_2|$. ……………………… 13 分

点 $A'\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{x_2x_3}{4}\right)$ 到直线 $B'C'$ 的距离为

$$d_2=\frac{\left|\frac{x_1x_2+x_1x_3}{4}-\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2x_3}{4}\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{x_1}{2}\right)^2}}=\frac{|(x_2-x_1)(x_3-x_1)|}{4\sqrt{1+\left(\frac{x_1}{2}\right)^2}},$$ ……………………………………14 分

则外切三角形 $A'B'C'$ 的面积 $S_2=\frac{1}{2}|B'C'|\cdot d_2=\frac{1}{16}|(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)|$. ………15 分

故 $$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{8}|(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)|}{\frac{1}{16}|(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)|}=2.$$

因此三角形 ABC 与外切三角形 $A'B'C'$ 的面积之比为定值 2. ………………17 分

解法二： 因为 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right),B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right),C\left(x_3,\frac{x_3^2}{4}\right)$，所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)\left(\frac{x_3^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}\right)-\left(\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}\right)(x_3-x_1)\right|$$

$$=\frac{1}{8}|(x_3-x_1)(x_2-x_1)(x_3-x_2)|$$ ……………………………………………13 分

由②得 $A'\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{x_2x_3}{4}\right)$，$B'\left(\frac{x_3+x_1}{2},\frac{x_3x_1}{4}\right)$，$C'\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)$

所以 $\overrightarrow{A'B'}=\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_3x_1-x_2x_3}{4}\right),\overrightarrow{A'C'}=\left(\frac{x_1-x_3}{2},\frac{x_1x_2-x_2x_3}{4}\right)$

$$S_{\triangle A'B'C'}=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}\times\overrightarrow{A'C'}\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\left(\frac{x_1x_2-x_2x_3}{4}\right)-\left(\frac{x_3x_1-x_2x_3}{4}\right)\left(\frac{x_1-x_3}{2}\right)\right|$$

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq。**

微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索