东莞中学、广州二中、惠州一中、深圳实验、珠海一中、中山纪念中学

2024 届高三第四次六校联考试题标准答案及评分标准

一、单项选择题 二、多项选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	B	C	C	A	B	A	D	ABD	AB	AD

1．A

解：$(x-3y)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-3y)^r=C_5^r(-3)^r x^{5-r}y^r$，

则第 3 项的系数为：$C_5^2(-3)^2=90$．故选 A.

2．B

解：因为 $a_3+a_7=10$，$a_6=7$，

则由等差数列的性质可知 $a_3+a_7=a_4+a_6=10$，

所以 $a_4=3$，公差 $d=\dfrac{a_6-a_4}{2}=2$．故选 B.

3．C

解：因为 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2$，且 $|\vec{a}|=1$，所以 $\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，即 $|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，

所以向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}=\overrightarrow{a}$．故选：$C$

4．C

解：

$$\tan A\tan B<1\Leftrightarrow 1-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}>0\Leftrightarrow\frac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}>0\Leftrightarrow\frac{-\cos C}{\cos A\cos B}>0\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C<0\Leftrightarrow\triangle ABC$$

为钝角三角形.

所以在 $\triangle ABC$ 中，“$\tan A\tan B<1$”是“$\triangle ABC$ 为钝角三角形”的充要条件.

5．A

易知外接球球心为ΔPAC 外心，故外接球半径 $R=\frac{2}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故外接球表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{16\pi}{3}$.

6．B

设使得血氧饱和度达到正常值，给氧时间至少还需要 $t-1$ 小时，

由题意可得 $60e^K=80$，$60e^{Kt}=90$，两边同时取自然对数并整理，得

$K=\ln\dfrac{80}{60}=\ln\dfrac{4}{3}=\ln 4-\ln 3=2\ln 2-\ln 3$，$Kt=\ln\dfrac{90}{60}=\ln\dfrac{3}{2}=\ln 3-\ln 2$，

则 $t=\dfrac{\ln 3-\ln 2}{2\ln 2-\ln 3}\approx\dfrac{1.10-0.69}{2\times 0.69-1.10}\approx 1.5$，则给氧时间至少还需要 0.5 小时

7．A

不妨设内切圆与三边切点分别为 P，Q，R$\therefore$|AP|=|AR|，|BP|=|BQ|，$|F_2Q|=|F_2R|$

$\because$点 A 在双曲线上

$\therefore|AF_1|-|AF_2|=2a$

又$\because|BF_1|=2a\therefore|AB|=|AF_2|$

$\therefore|BP|=|F_2R|$

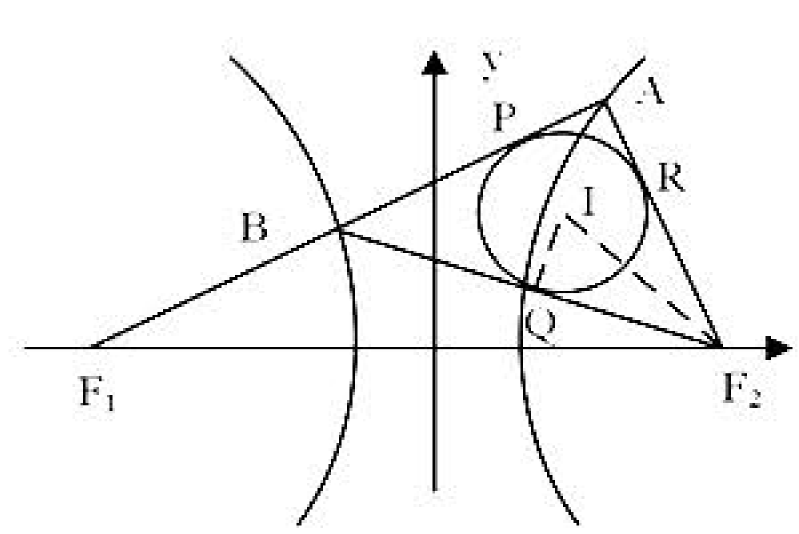
$\therefore|BQ|=|QF_2|$

$\because$点 B 在双曲线上

$\therefore|BF_2|-|BF_1|=2a$

$\therefore|BF_2|=4a$

$\therefore|QF_2|=\frac{1}{2}|BF_2|=2a$



设内切圆圆心为 I，连接 IQ、IF_2，如图所示$\because\tan\angle IF_2Q=\frac{|IQ|}{|QF_2|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \angle QF_2l=\frac{\pi}{6}$　　即$\angle BF_2A=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \Delta ABF_2$为等边三角形$\therefore |AF_1|=6a$，$|AF_2|=4a$，$|F_1F_2|=2c$，$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$

在ΔAF_1F_2由余弦定理得：$|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1|\cdot|AF_2|\cdot cos\angle F_1AF_2$

即：$4c^2=36a^2+16a^2-24a^2=28a^2$

$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{28}{4}}=\sqrt{7}$

8．D

解：$\because f(x)=sin2xcosx+cos2xsinx-sin2x=2sinxcos^2x+cos2xsinx-2sinxcosx$

$=sinx(2cos^2x+2cos^2x-1-2cosx)=sinx(4cos^2x-2cosx-1)$

令$f(x)=0$，则$sinx=0$ 或 $4cos^2x-2cosx-1=0$

即：$sinx=0$ 或$cosx=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

由图像可知，函数 $f(x)$ 共 8 个零点

另法：因为$f(x)=\sin(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}x)-\sin(\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}x)=2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{5}{2}x$

由$f(x)=0$，得$\sin\frac{1}{2}x=0$，或$\cos\frac{5}{2}x=0$

所以$\frac{1}{2}x=k\pi$，或$\frac{5}{2}x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，即$x=2k\pi$，或$x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}$，$k\in Z$

因为$-\pi<x<2\pi$

所以$x=0$，或$x=-\frac{3}{5}\pi,-\frac{1}{5}\pi,\frac{1}{5}\pi,\frac{3}{5}\pi,\pi,\frac{7}{5}\pi,\frac{9}{5}\pi$共8个零点

9．ABD

解析：

对于$y=f(x)=2^x$，对于$\forall x\in A$，均有唯一确定$f(x)\in(0,+\infty)=B$，符合函数定义，故选项 A 正确

对于$y=f(x)=2^x$，对于$\forall x\in B$，均有唯一确定$f(x)\in(1,+\infty)\subseteq B$，符合函数定义，故选项 B 正确

对于$x=f(y)=\log_2 y$，取$y=1\in A$，$x=0\notin B$，不符合函数定义，故选项 C 错误

对于$x=f(y)=\log_2 y$，对于$\forall y\in B$，均有唯一确定$f(y)\in R=A$，符合函数定义，故选项 D 正确

10．解：设$z=a+bi(a,b\in R)$，则$\overline{z}=a-bi$，$iz=-b+ai$，

所以$\overrightarrow{OA}=(a,b)$，$\overrightarrow{OB}=(a,-b)$，$\overrightarrow{OC}=(-b,a)$，

对于A，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{a^2+b^2}$，$A$正确；

对于B，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-ab+ab=0$，所以$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$，$B$正确；

对于C，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|=\sqrt{(-b-a)^2+(a-b)^2}=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$，

$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(-b-a)^2+(a+b)^2}=\sqrt{2}|a+b|$，

所以$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$不一定成立，$C$错误；

对于D，$\overrightarrow{OB}=(a,-b)$，$\overrightarrow{AC}=(-b-a,a-b)$，

而$a(a-b)=-b(-b-a)$不一定成立，所以$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{AC}$不一定平行，D错误；故选AB.

11．AD

对于 A 选项，由$a_1=ln\frac{x_1-b}{x_1-c}=1$　得$\frac{x_1-b}{x_1-c}=e$，所以$x_1=\frac{e\cdot c-b}{e-1}$，A 正确.

$\because$二次函数$f(x)$有两个不等式实根 b，c

∴不妨设$f(x)=a(x-b)(x-c)$
∵ $f'(x)=a(2x-b-c)$
∴ $f'(x_n)=a(2x_n-b-c)$
∴在横坐标为x_n的点处的切线方程为：$y-f(x)=a(2x_n-b-c)(x-x_n)$令 y=0，
则$x_{n+1}=x=\frac{a\cdot x_n(2x_n-b-c)-f(x_n)}{a(2x_n-b-c)}=\frac{ax_n^2-abc}{a(2x_n-b-c)}=\frac{x_n^2-bc}{2x_n-b-c}$ ∵ $\frac{x_{n+1}-b}{x_{n+1}-c}=\frac{x_n^2-bc-b(2x_n-b-c)}{x_n^2-bc-c(2x_n-b-c)}=\frac{x_n^2-2bx_n+b^2}{x_n^2-2cx_n+c^2}=\frac{(x_n-b)^2}{(x_n-c)^2}$
∴ $ln\frac{x_{n+1}-b}{x_{n+1}-c}=2ln\frac{x_n-b}{x_n-c}$ 即：$a_{n+1}=2a_n$
∴ $\{a_n\}$为公比是 2，首项为 1 的等比数列.
∴ $a_n=2^{n-1}$ 故 BC 错.

对于 D 选项，由$a_n+\frac{1}{a_n}=2^{n-1}+(\frac{1}{2})^{n-1}$，得$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2^n-1+2-\frac{2}{2^n}=2^n+1-\frac{1}{2^{n-1}}$，故 D 正确.

三、填空题：（每小题 5 分，共 15 分）

12	13	14
36	$[-\frac{10}{3},\frac{70}{3}]$	$\frac{\sqrt{7}}{4}$；$\frac{23}{4}$

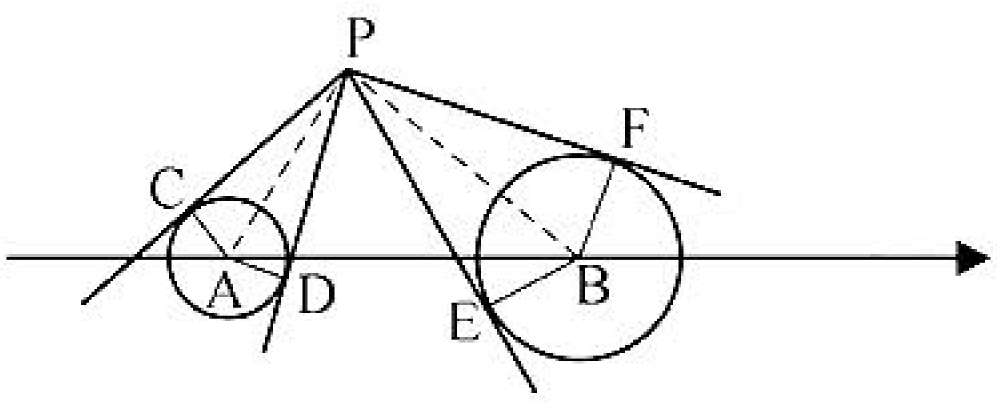
12. 36

依题意，甲组的中位数必为 5，乙组的中位数必为 6

所以甲组另外四个数，可从 1,2,3,4 和 7,8,9,10 这两组数各取 2 个，共有 $C_4^2C_4^2=36$

13. $[-\frac{10}{3},\frac{70}{3}]$

连接圆心和切点，如图所示：即有$\angle APC=\angle BPF=\theta$



AC=1，BF=2 $\angle ACP=\angle BFP=\frac{\pi}{2}$ ∵ $|PA|sin\theta=AC=1$ $|PB|sin\theta=BF=2$

∴ $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$ 设 P(x,y) ∵ $2|PA|=|PB|$ ∴ $2\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

∴ $x^2+y^2+\frac{30}{2}x+4=0$ 化简得：$(x+\frac{10}{3})^2+y^2=\frac{64}{9}$

∴P 的轨迹为以圆心（$-\frac{10}{3}$，0），$\frac{8}{3}$为半径的圆. ∵P 在直线 $4y+3x+t=0$ 上

∴直线 $4y+3x+t=0$ 与$(x+\frac{10}{3})^2+y^2=\frac{64}{9}$有交点 ∴ $\frac{|-10+t|}{5}\le\frac{8}{3}$ ∴ $-\frac{10}{3}\le t\le\frac{70}{3}$

14. $\frac{\sqrt{7}}{4}$；$\frac{23}{4}$

解：设外接圆半径为 R，则 $R=2$，

由正弦定理，可知 $\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{3}{\sin\angle ACB}=2R=4$，

即 $\sin\angle ACB=\frac{3}{4}$，由于 $\angle ACB$ 是锐角，故 $\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

又由题意可知 P 为三角形 ABC 的垂心，即 $AP\perp BC$，故 $\angle PAC=\frac{\pi}{2}-\angle ACB$，

所以 $\sin\angle PAC=\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{7}}{4}$；

设 $\angle CAB=\theta,\angle CBA=\alpha,\angle ACB=\beta$，

则 $\angle PAC=\frac{\pi}{2}-\beta,\angle PBA=\frac{\pi}{2}-\theta,\angle PAB=\frac{\pi}{2}-\alpha$，

由于 $AC:AB:BC=6:5:4$，不妨假设 $AC=6,AB=5,BC=4$，

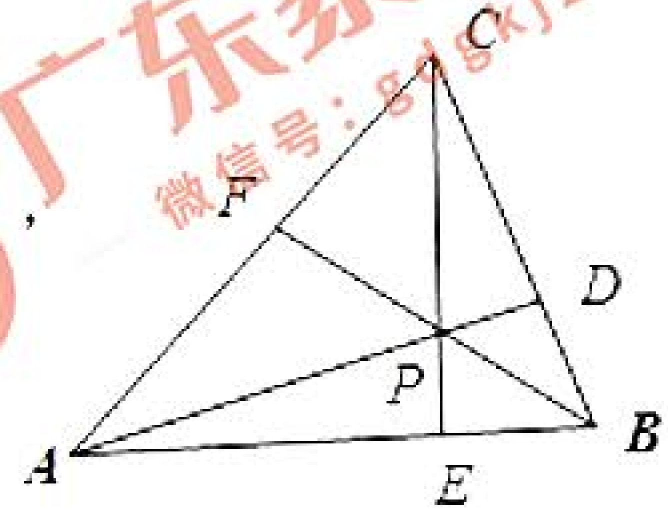
由余弦定理知 $\cos\theta=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\dfrac{3}{4}, \cos\alpha=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\dfrac{1}{8}, \cos\beta=\dfrac{4^2+6^2-5^2}{2\times4\times6}=\dfrac{9}{16}$ ，

设 AD， CE， BF 为三角形的三条高，由于 $\angle ECB+\angle EBC=\dfrac{\pi}{2}, \angle PCD+\angle CPD=\dfrac{\pi}{2}$，

故 $\angle EBC=\angle CPD$ ，

则得 $\angle APC=\pi-\angle CPD=\pi-\angle EBC=\pi-\angle ABC$ ，

所以 $\dfrac{PC}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)}=\dfrac{PA}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=\dfrac{AC}{\sin\angle APC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=2R=4$ ，



同理可得 $\dfrac{PB}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{AB}{\sin\angle APB}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=2R=4$ ，

所以 $PA+PB+PC=4(\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta)=4\times(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{9}{16})=\dfrac{23}{4}$ ，

故答案为： $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ； $\dfrac{23}{4}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）

解：（1）设抛物线 C_2 的标准方程为 $y^2=2px(p>0)$

则 $2p=\dfrac{y^2}{x}$

因为 $\dfrac{2^2}{1}=\dfrac{(2\sqrt{2})^2}{2}=4$

所以点 $(1,2),(2,2\sqrt{2})$ 在抛物线 C_2 上，且 $2p=4$，解得 $p=2$ ……………………3 分

所以抛物线 C_2 的标准方程为 $y^2=4x$． ……………………4 分

将点 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}),(\sqrt{2},0)$ 代入椭圆 C_1 的标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中

得 $\begin{cases}\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1\\ \dfrac{2}{a^2}=1\end{cases}$ ，解得 $a^2=2,b^2=1$ ……………………6 分

所以椭圆 C_1 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$． ……………………7 分

（2）根据对称性，可设 A,B 两点坐标分别为 $(x_0,y_0),(x_0,-y_0)$

联立方程组 $\begin{cases}y^2=4x\\ x^2+2y^2=2\end{cases}$，消 y 得 $x^2+8x-2=0$ ……………………9 分

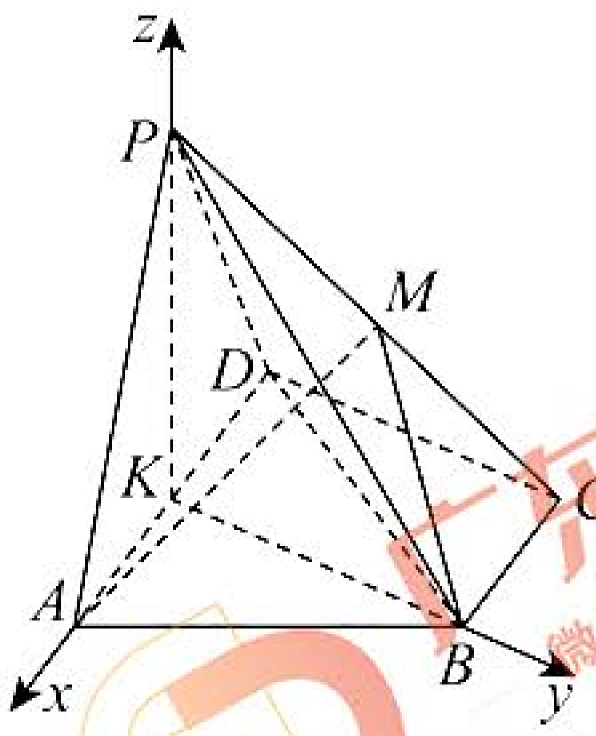
解得 $x_1=-4-3\sqrt{2}$，$x_2=-4+3\sqrt{2}$

因为 $x=\dfrac{y^2}{4}\geq0$

所以 $x_0=3\sqrt{2}-4$ ……………………11 分

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}={x_0}^2-{y_0}^2={x_0}^2-4x_0=(3\sqrt{2}-4)^2-4(3\sqrt{2}-4)=50-36\sqrt{2}$ ……………13 分

16.（15 分）



（1）证明：如图，取 AD 的中点 K，连接 PK, BK，

$\because \triangle PAD$ 为正三角形，$AD=2$，

$\therefore PK=\sqrt{3}$，且 $PK\perp AD$． ……………………1 分

$\because AD=2BC=2$，K 为 AD 中点，$\therefore DK=BC$，

又 $\because$ 底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD\,//\,BC$，

$\therefore$ 四边形 $BKDC$ 为平行四边形

且 $BK\perp AD$，$BK=CD=\sqrt{3}$ ……………………2 分

又 $\because PB=\sqrt{6}$，$\therefore PK^2+BK^2=PB^2$，$\therefore PK\perp BK$． ……………………4 分

又 $\because PK\perp AD$，$BK\cap AD=K$，$BK, AD\subset$ 平面 $ABCD$， ……………………5 分

$\therefore PK\perp$ 平面 $ABCD$．

$\because PK\subset$ 平面 PAD，

$\therefore$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$ ……………………6 分

(2)由（1）易知 $PK\perp$ 平面 $ABCD$，$BK\perp AD$，

如图，以 K 为坐标原点 KA, KB, KP 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系， ……………………7 分

则 $P(0,0,\sqrt{3})$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $C(-1,\sqrt{3},0)$, $D(-1,0,0)$，$M(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\therefore \overrightarrow{CD}=(0,-\sqrt{3},0)$, $\overrightarrow{PD}=(-1,0,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BM}=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ ……………………9 分

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-\sqrt{3}y=0\\ -x-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=0, z=-1$，$\vec{n}=(\sqrt{3},0,-1)$， ……………………11 分

设 BM 与平面 PCD 所成的角为 θ，则 ……………………12 分

$$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BM},\vec{n}>|=\frac{|\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BM}||\vec{n}|}=\frac{|-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$ ……………………14 分

$\therefore BM$ 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$． ……………………15 分

（方法不唯一，若考生从几何法入手，依据实际情况酌情给分）

17.（15 分）

解：（1）用事件 A_1 表示选择甲种无人运输机，用事件 A_2 表示选择乙种无人运输机，

用事件 B 表示“选中的无人运输机操作成功” ……………………2 分

则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$ ……………………4 分

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$ 为所求． ……………………6 分

（2）设方案一和方案二操作成功的次数分别为 X，Y，则 X，Y 的所有可能取值均为 0，1，2，

……………………7 分

方案一：$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{8}$，

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{32}$，

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{32}$， ……………………10 分

所以$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{15}{32}+2\times\frac{13}{32}=\frac{41}{32}$. ……………………………11 分

方案二：

方法一：选择其中一种操作设备后，进行 2 次独立重复试验，

所以$E(Y)=\frac{1}{2}\times2\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$， ……………………………13 分

方法二：

$P(Y=0)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{32}$，

$P(Y=1)=\frac{1}{2}\times C_2^1\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times C_2^1\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$，

$P(Y=2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{32}$，

所以$E(Y)=0\times\frac{5}{32}+1\times\frac{7}{16}+2\times\frac{13}{32}=\frac{5}{4}$. ……………………………13 分

所以$E(X)>E(Y)$，即方案一操作成功的次数的期望值大于方案二操作成功的次数的期望值.

……………………………15 分

18.（17 分）

（1）证明：设$G(x)=x-g(x)=x-\sin x$，$x>0$

则$G'(x)=1-\cos x>0$，所以$G(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增， ……………………………2 分

所以$G(x)>G(0)=0$，即$g(x)<x$. ……………………………3 分

设$F(x)=f(x)-x=e^x+\cos x-2-x$，$x>0$

则$F'(x)=e^x-\sin x-1$ ……………………………4 分

由$x>0$时，$g(x)<x$，即$-\sin x>-x$

所以$F'(x)=e^x-\sin x-1>e^x-x-1$ ……………………………5 分

设$h(x)=e^x-x-1$，则$h'(x)=e^x-1$，

当$x>0$时，$h'(x)>0$，所以函数$h(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

故在区间$(0,+\infty)$上，$h(x)>h(0)=0$，即在区间$(0,+\infty)$上，$e^x>x+1$， ……………………………6 分

所以$F'(x)>e^x-x-1>0$

所以$F(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增

所以$F(x)>F(0)=0$，即$F(x)>x$ ……………………………7 分

所以$g(x)<x<f(x)$得证.

（2）由$f(x)+g(x)>ax$在区间$(0,+\infty)$上恒成立，即$e^x+\cos x-2+\sin x-ax>0$在区间$(0,+\infty)$上恒成立，

设$\varphi(x)=e^x+\cos x-2+\sin x-ax$，则$\varphi(x)>0$在区间$(0,+\infty)$上恒成立，

而$\varphi'(x)=e^x-\sin x+\cos x-a$ ……………………………8 分

令$m(x)=\varphi'(x)$，则$m'(x)=e^x-\cos x-\sin x$，

由（1）知：在区间$(0,+\infty)$上，$e^x>x+1>\sin x+\cos x$，

即$m'(x)=e^x-\cos x-\sin x>0$，所以在区间$(0,+\infty)$上函数$\varphi'(x)$单调递增， ……………………………10 分

①当$a\le2$时，$\varphi'(0)=2-a\ge0$，

故在区间$(0,+\infty)$上函数$\varphi'(x)>0$，所以函数$\varphi(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

又$\varphi(0)=0$，故$\varphi(x)>0$，即函数$f(x)+g(x)>ax$在区间$(0,+\infty)$上恒成立. ……………………………13 分

②当$a>2$时，$\varphi'(0)=2-a$，

$\varphi'[\ln(a+2)]=a+2-\sin[\ln(a+2)]+\cos[\ln(a+2)]-a=2-\sqrt{2}\sin\left([\ln(a+2)]-\frac{\pi}{4}\right)>0$ …………15 分

故在区间 $(0,\ln(a+2))$ 上函数 $\varphi'(x)$ 存在零点 x_0，即 $\varphi'(x_0)=0$，

又在区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $\varphi'(x)$ 单调递增，故在区间 $(0,x_0)$ 上函数 $\varphi'(x)<\varphi'(x_0)=0$，

所以在区间 $(0,x_0)$ 上函数 $\varphi(x)$ 单调递减，

由 $\varphi(0)=0$，所以在区间 $(0,x_0)$ 上 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$，与题设矛盾.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,2]$. ……………………………17 分

（矛盾区间找点用极限说明扣 1 分）

19.（17 分）

解：（1）集合 $A=\{1,2,3,5,7,9\}$ 不具有性质 P，理由如下： ……………………………1 分

（i）从集合 A 中任取三个元素 x,y,z 均为奇数时，$x+y+z$ 为奇数，不满足条件③

（ii）从集合 A 中任取三个元素 x,y,z 有一个为 2，另外两个为奇数时，不妨设 $y=2$，$x<z$

则有 $z-x\geq 2$，即 $z-x\geq y$，不满足条件② ……………………………4 分

综上所述，可得集合 $A=\{1,2,3,5,7,9\}$ 不具有性质 P.

（2）证明：由 $3+4+a$ 是偶数，得实数 a 是整数

当 $a<3<4$ 时，由 $a+3>4$，得 $1<a<3$，即 $a=2$

因为 $2+3+4=9$ 不是偶数

所以 $a=2$ 不合题意 ……………………………6 分

当 $3<4<a$ 时，由 $3+4>a$，得 $4<a<7$，即 $a=5$，或 $a=6$

因为 $3+4+5=12$ 是偶数，$3+4+6=13$ 不是偶数

所以 $a=6$ 不合题意 ……………………………8 分

所以集合 $B=\{3,4,5\}$

令 $a+b=3,b+c=4,c+a=5$，解得 $a=2,b=1,c=3$

显然 $a,b,c\in S_4=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

所以集合 B 是集合 S_4 的“期待子集”得证. ……………………………10 分

（3）证明：

先证充分性：

当集合 M 是集合 S_n 的“期待子集”时，存在三个互不相同的 a,b,c，使得 $a+b,b+c,c+a$ 均属于 M

不妨设 $a<b<c$

令 $x=a+b$，$y=a+c$，$z=b+c$

则 $x<y<z$，即满足条件①

因为 $x+y-z=(a+b)+(a+c)-(b+c)=2a>0$

所以 $x+y>z$，即满足条件② ……………………………12 分

因为 $x+y+z=2(a+b+c)$

所以 $x+y+z$ 为偶数，即满足条件③

所以当集合 M 是集合 S_n 的“期待子集”时，集合 M 具有性质 P. ……………………13 分

再证必要性：

当集合 M 具有性质 P，则存在 x,y,z，同时满足① $x<y<z$；② $x+y>z$；③ $x+y+z$ 为偶数

令 $a=\dfrac{x+y+z}{2}-z$，$b=\dfrac{x+y+z}{2}-y$，$c=\dfrac{x+y+z}{2}-x$ ……………………14 分

则由条件①得 $a<b<c$

由条件②得 $a=\dfrac{x+y+z}{2}-z=\dfrac{x+y-z}{2}>0$

由条件③得 a,b,c 均为整数

因为 $z-c=z+x-\dfrac{x+y+z}{2}=\dfrac{z+x-y}{2}>\dfrac{z+(y-z)-y}{2}=0$

所以 $0<a<b<c<z$，且 a,b,c 均为整数

所以 $a,b,c\in S_n$

因为 $a+b=x,a+c=y,b+c=z$

所以 $a+b,b+c,c+a$ 均属于 M

所以当集合 M 具有性质 P 时，集合 M 是集合 S_n 的“期待子集” ……………………………**17 分**

综上所述，集合 M 是集合 S_n 的“期待子集”的充要条件是集合 M 具有性质 P.