

西安中学 2023-2024 学年度第一学期期末考试

高三数学（文科）试题

（时间：120 分钟 满分：150 分） 命题人：丁云

一、单选题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{(1,2), (2,1)\}$, $B = \{(x,y)|x - y = 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{2,1\}$ B. $\{(1,2)\}$ C. $\{(2,1)\}$ D. $\{1,2\}$
2. 设 $a \in R$, 则 “ $|a| > 1$ ” 是 “ $a^2 > 1$ ” 的 ()
A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件
3. 下列函数中, 是偶函数且在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 ()
A. $y = 3^x$ B. $y = \log_3|x|$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = -x^2 + 1$
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_5 = 1$, $a_9 = 81$, 则 $a_7 =$ ()
A. 9 或 -9 B. 9 C. 27 或 -27 D. -27
5. 双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的焦点到渐近线的距离为 ()
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$
6. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 AB_1 与平面 ABC_1D_1 所成角的正弦值为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. 计算机是将信息转换成二进制数进行处理的, 二进制即 “逢二进一”. 如 $(1101)_2$ 表示二进制的数, 将它转换成十进制的形式是 $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13$, 那么将二进制数 $\underbrace{11 \cdots 1}_{16 \text{ 位}}$ 转换成十进制数的形式是 ()
A. $2^{17} - 2$ B. $2^{16} - 1$ C. $2^{16} - 2$ D. $2^{15} - 1$
8. 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$, $AB = 2$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} =$ ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2
9. 设 P 为直线 $3x - 4y + 4 = 0$ 上的动点, PA, PB 为圆 $C: (x - 2)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, A, B 为切点, 则四边形 $APBC$ 面积的最小值为 ()
- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$
10. 已知直线 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 $P(2, 1)$, 则椭圆 C 的离心率是 ()
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$
11. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x + \sin^2 x$, 下列结论中错误的是 ()
- A. $f(x)$ 是偶函数 B. 函数 $f(x)$ 最小值为 $\frac{3}{4}$
- C. $\frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期 D. 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减
12. 已知 $9^m = 10$, $a = 10^m - 11$, $b = 8^m - 9$, 则 ()
- A. $a > 0 > b$ B. $a > b > 0$ C. $b > a > 0$ D. $b > 0 > a$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} (n \geq 2)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前9项和等于 _____.

14. 某建材商场国庆期间搞促销活动, 规定: 如果顾客选购物品的总金额不超过1000元, 则不享受任何折扣优惠; 如果顾客选购物品的总金额超过1000元, 则超过1000元部分享受一定的折扣优惠, 折扣优惠按下表累计计算.

可以享受折扣优惠金额	折扣优惠率
不超过500元部分	5%
超过500元的部分	10%

某人在此商场购物获得的折扣优惠金额为40元, 则他实际所付金额为 _____ 元.

15. 已知关于 x 的方程 $x - 2\ln x - a = 0$ 在区间 $[1, 3]$ 内有两个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 _____.

16. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为2, $\angle BAD = 60^\circ$. 以 D_1 为球心, $\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为_____.

三、解答题: 本题共7小题, 共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(一)必考题:共60分.

17. (本小题12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(a+b)(\sin A - \sin B) = (b+c)\sin C$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若点 D 是 BC 的中点, 且 $AD = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

18. (本小题12分)

某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了10件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} , 样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2 .

(1)求 \bar{x} , \bar{y} , s_1^2 , s_2^2 ;

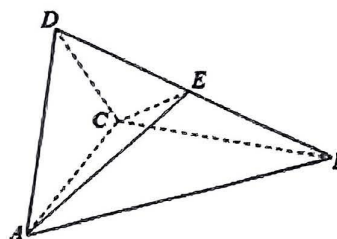
(2)判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高(如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高)($\sqrt{76} \approx 8.718$).

19. (本小题12分)

如图，四面体 $ABCD$ 中， $\triangle ABC$ 是正三角形， $AD = CD$.

(1)证明： $AC \perp BD$;

(2)已知 $\triangle ACD$ 是直角三角形， $AB = BD$ ，若 E 为棱 BD 上与 D 不重合的点，且 $AE \perp EC$ ，求四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比.



第 19 题图

20. (本小题12分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ ，过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.

(1)证明：坐标原点 O 在圆 M 上;

(2)设圆 M 过点 $P(4, -2)$ ，求直线 l 与圆 M 的方程.

21. (本小题12分)

已知函数 $f(x) = \frac{2m}{3}x^3 - \frac{m+2}{2}x^2 + x$ ，其中 m 为正实数.

(1)试讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)设 $g(x) = f'(x) + \ln x - mx^2 - 1$ ，若存在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ，使得不等式 $g(x) < -2$ 成立，求 m 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题作答.

22. (本小题10分)

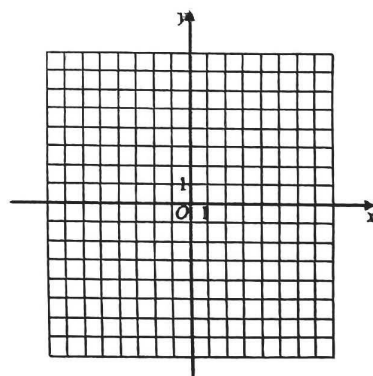
在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos 2t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ (t 为参数).以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + m = 0$.

- (1)写出 l 的直角坐标方程;
- (2)若 l 与 C 有公共点, 求 m 的取值范围.

23. (本小题10分)

已知函数 $f(x) = |x - 2|$, $g(x) = |2x + 3| - |2x - 1|$.

- (1)画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像;
- (2)若 $f(x + a) \geq g(x)$, 求 a 的取值范围.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

