# 江苏省 2023-2024 学年高三上学期期末迎考卷
## 数学参考答案与评分标准

1. C　解析：因为 $A=\{20,24\}$，$B=\{20,23\}$，所以 $A\cup B=\{20,23,24\}$，则 $A\cup B$ 中的合数为 20 和 24.

2. A　解析：$z=\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=-\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{9}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i=1$

3. C　解析：若 $y=f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，所以 $\cos(-x+\varphi)=-\cos(x+\varphi)$，则有 $\cos x\cos\varphi=0$，则 $\cos\varphi=0$. 因为 $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$，所以"$y=f(x)$ 为奇函数"是"$\varphi=\frac{\pi}{2}$"的必要不充分条件.

4. C　解析：由题意得 $F_1+F_2+F_3=0$，所以 $-F_3=F_1+F_2$，两边平方得 $|F_3|^2=|F_1|^2+2F_1\cdot F_2+|F_2|^2$，即 $|F_3|^2=1+2\times1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4=3$，所以 $|F_3|=\sqrt{3}$.

5. A　解析：第 $r+1$ 项的系数为 $C_8^ra^r$，由题意得 $\begin{cases}C_8^4a^4>C_8^3a^3,\\ C_8^4a^4>C_8^5a^5,\end{cases}$ 解得 $\frac{4}{3}<a<\frac{5}{2}$

6. B　解析：由图知 $|AB|=T=\frac{\pi}{\omega}$，由 $f(0)=2\tan\frac{\pi}{4}=2$，得 $y_C=2$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=2$.

7. C　解析：由题意得 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，$n\in N^*$，所以 $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$，$n\in N^*$，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 $d$. 因为 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，所以 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$，$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$（常数），则 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也为等差数列. 因为 $5S_7-7S_5=35$，所以 $\frac{S_7}{7}-\frac{S_5}{5}=1$，则数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 $\frac{1}{2}$，所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{S_1}{1}+(n-1)\times\frac{1}{2}=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$，所以 $\frac{n(n+1)}{4S_nS_{n+1}}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，所以 $\sum_{n=1}^{2024}\frac{n(n+1)}{4S_nS_{n+1}}=\sum_{n=1}^{2024}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2026}=\frac{506}{1013}$.

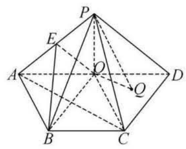
8. D　解析：因为 $g(x)=(f(x))^2-f(f(x))$，所以令 $t=f(x)$，则 $g(x)=t^2-f(t)$，令 $g(x)=0$，可得 $t^2=f(t)$. 当 $t>0$ 时，由 $t^2=f(t)$，可得 $t^2=(t-2)^2$，即 $-4t+4=0$，解得 $t=1$；当 $t\le0$ 时，由 $t^2=f(t)$，可得 $t^2=2t+3$，即 $t^2-2t-3=0$，解得 $t=-1$ 或 $t=3$（舍去）. 所以 $t=\pm1$，即 $f(x)=\pm1$. 当 $x>0$ 时，令 $(x-2)^2=1$ 或 $(x-2)^2=-1$（舍去），解得 $x=1$ 或 $x=3$；当 $x\le0$ 时，令 $2x+3=\pm1$，解得 $x=-1$ 或 $x=-2$. 所以函数 $g(x)=(f(x))^2-f(f(x))$ 的零点之和为 $1+3-1-2=1$

9. ABD　解析：对于 A，因为 $P(X>9)=\frac{1}{2}$，所以 $\mu=9$，所以 $P(X<7)=P(X>11)=\frac{2}{5}$，所以 $P(7<X<9)=\frac{1}{2}-P(X<7)=\frac{1}{10}$，故 A 正确；对于 B，$P=1-\frac{C_5^5}{C_6^5}=\frac{5}{6}$，故 B 正确；对于 C，$\xi$ 服从超几何分布，且 $N=9$，$M=4$，$n=2$，所以 $E(\xi)=\frac{nM}{N}=\frac{8}{9}$，故 C 错误；对于 D，因为 $\overline{y}=19$，$\overline{x}=9$，所以 $19=9\hat{b}+1$，得 $\hat{b}=2$，故 D 正确.

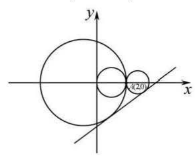
10. AD　解析：令 $f(x)=0$，得 $(x^2+ax+b)e^x=0$，即 $x^2+ax+b=0$，$\Delta_1=a^2-4b$. 当 $\Delta_1>0$ 时，$f(x)$ 有两个零点；当 $\Delta_1=0$ 时，$f(x)$ 有一个零点；当 $\Delta_1<0$ 时，$f(x)$ 无零点. 又 $f'(x)=[x^2+(a+2)x+a+b]e^x$. 令 $f'(x)=0$，得 $x^2+(a+2)x+a+b=0$，$\Delta_2=(a+2)^2-4(a+b)=a^2-4b+4$. 当 $\Delta_2>0$ 时，$f'(x)$ 有两个变号零点，即 $f(x)$ 有两个极值点；当 $\Delta_2\le0$ 时，$f'(x)$ 没有变号零点，即 $f(x)$ 没有极值点. 对于 A，因为 $f(x)$ 没有极值点，所以 $\Delta_2=a^2-4b+4\le0$，即 $a^2-4b\le-4$，故 $\Delta_1<0$，所以 $f(x)$ 没有零点，故 A 正确；对于 B，若 $f(x)$ 没有零点，则 $\Delta_1=a^2-4b<0$，此时 $\Delta_2=a^2-4b+4<4$，当 $\Delta_2>0$ 时，$f(x)$ 有两个极值点，故 B 错误；对于 C，若 $f(x)$ 恰有一个零点，则 $\Delta_1=a^2-4b=0$，此时 $\Delta_2=a^2-4b+4>0$，故 $f(x)$ 有两个极值点，故 C 错误；对于 D，若 $f(x)$ 有两个零点，则 $\Delta_1=a^2-4b>0$，此时 $\Delta_2=a^2-4b+4>0$，故 $f(x)$ 一定有两个极值点，故 D 正确. 

11. BD　解析：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1=y_1^2$，$x_2=y_2^2$. 对于 A，假设直线 $PA$ 的斜率为 $\frac{1}{10}$，则 $k_{AP}=\frac{y_1-3}{y_1^2}=\frac{1}{10}\Rightarrow y_1^2-10y_1+30=0$，由于 $\Delta=100-120<0$，则该方程无解，所以直线 $PA$ 的斜率不可能为 $\frac{1}{10}$，故 A 错误；对于 B，$|PA|=\sqrt{y_1^4+(3-y_1)^2}$，记 $y=y_1^4+(3-y_1)^2$，则 $y'=4y_1^3-2(3-y_1)$，记 $g(y_1)=4y_1^3-2(3-y_1)$，则 $g'(y_1)=12y_1^2+2>0$，$y'=g(y_1)$ 单调递增. 由于 $y'\big|_{y_1=1}=0$，因此，当 $y_1>1$ 时，$y'>0$，$y=y_1^4+(3-y_1)^2$ 单调递增，当 $y_1<1$ 时，$y'<0$，$y=y_1^4+(3-y_1)^2$ 单调递减，故当 $y_1=1$ 时，$y=y_1^4+(3-y_1)^2$ 取最小值 5，因此 $|PA|=\sqrt{y_1^4+(3-y_1)^2}$ 的最小值为 $\sqrt{5}$，故 B 正确；对于 C，若 $P,A,B$ 三点共线，$A$ 为线段 $PB$ 的中点，则 $0+x_2=2x_1$，$3+y_2=2y_1$，所以 $x_2=2x_1$，$y_2=2y_1-3$. 又 $y_1^2=x_1$，$y_2^2=x_2$，所以 $(2y_1-3)^2=x_2=2x_1=2y_1^2$，即 $2y_1^2-12y_1+9=0$，$\Delta=144-4\times2\times9=72>0$，故 $2y_1^2-12y_1+9=0$ 有两个不相等的实数根，所以满足条件的点 $B$ 不唯一，故 C 错误，D 正确.

12. AC　解析:易证四边形 $ABCO$ 为菱形,所以 $BO\perp AC$,如图,连接 $PO$,因为 $PA=PD=\sqrt{2}$,$O$ 为 $AD$ 中点,所以 $PO\perp AD$.因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,$PO\subset$平面 $PAD$,所以 $PO\perp$平面 $ABCD$.因为 $AC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp AC$.又 $PO,OB\subset$平面 $POB$,$PO\cap OB=O$,所以 $AC\perp$平面 $POB$.又 $BP\subset$平面 $POB$,所以 $AC\perp BP$,故 A 正确.易证$\triangle AOE$ 为等腰直角三角形,$\triangle AOB$ 为等边三角形,且平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,所以三棱锥 $B\text{-}AOE$ 外接球的球心为等边三角形 $AOB$ 的中心,所以三棱锥 $B\text{-}AOE$ 外接球的半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以三棱锥 $B\text{-}AOE$ 外接球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$,故 B 错误.因为 $PD\parallel OE$,所以$\angle CPD$ 为异面直线 $PC$ 与 $OE$ 所成的角(或其补角).因为 $PO=\sqrt{PD^2-OD^2}=1$,所以 $PC=\sqrt{PO^2+OC^2}=\sqrt{2}$.在$\triangle PCD$ 中,由余弦定理,得 $\cos\angle CPD=\frac{2+2-1}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$,故 C 正确.因为 $PO\perp$平面 $ABCD$,连接 $OQ,PQ$,若直线 $PQ$ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$.则$\angle PQO=60°$.因为 $PO=1$,所以 $OQ=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故点 $Q$ 的轨迹是以 $O$ 为圆心,$\frac{\sqrt{3}}{3}$为半径的半圆,所以点 $Q$ 的轨迹长度为$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$,故 D 错误.



(第 12 题)



(第 13 题)

13. $(x+1)^2+y^2=9\left(或\left(x-\frac{11}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}\right)$　解析:由题知两圆心连线过点 $A(2,0)$,圆 $x^2-2x+y^2=0$,即$(x-1)^2+y^2=1$,圆心为$(1,0)$,半径为 1,故圆 $C$ 的圆心 $C$ 在 $x$ 轴上.

①若两圆内切,则 $C(2-r,0)$,故 $d=\frac{|3(2-r)-12|}{5}=r$,解得 $r=3$,则圆 $C$ 的标准方程为$(x+1)^2+y^2=9$;

②若两圆外切,则 $C(2+r,0)$,故 $d=\frac{|3(2+r)-12|}{5}=r$,解得 $r=\frac{3}{4}$,则圆 $C$ 的标准方程为$\left(x-\frac{11}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}$.

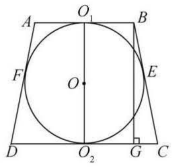
14. $\sqrt{3}$　解析:$4\sin 40°-\tan 40°=4\sin 40°-\frac{\sin40°}{\cos40°}=$

$\frac{4\sin40°\cos40°-\sin40°}{\cos40°}=\frac{2\sin80°-\sin40°}{\cos40°}=$

$\frac{2\cos10°-\sin40°}{\cos40°}=\frac{2\cos(40°-30°)-\sin40°}{\cos40°}=$

$\frac{2\cos40°\cos30°+2\sin40°\sin30°-\sin40°}{\cos40°}=\sqrt{3}$.

15. $\frac{4\pi}{3}$　解析:如图,画出截面图.易得 $O_1B=BE=r_1,O_2C=CE=r_2$,所以 $BC=r_1+r_2$.记内切球的半径为 $R$,则 $O_1O_2=2R$.过 $B$ 作 $BG\perp DC$,垂足为 $G$,则 $CG=r_2-r_1,BG=O_1O_2=2R$,所以 $(r_1+r_2)^2=4R^2+(r_2-r_1)^2\Rightarrow 4R^2=4r_1r_2\le 2\left(\frac{2r_1+r_2}{2}\right)^2=4\Rightarrow R\le 1$,所以它的内切球的体积的最大值为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}$.



(第 15 题)

16. $2\sqrt{2}$　解析:由题可得双曲线为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{4x}$,所以渐近线为 $x=0$ 及 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$,渐近线夹角为 $60°$,则 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以焦点所在的直线方程为 $y=\sqrt{3}x$.由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{4x},\end{cases}$

得 $\sqrt{3}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{4x}$,解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{6}}{4},\\ y=\frac{3\sqrt{2}}{4}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{6}}{4},\\ y=-\frac{3\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$

此时 $a=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,则 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$,则焦距为 $2\sqrt{2}$.

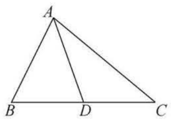
17. 解答:(1) 因为 $2a=b\cos C+c,c=2$,所以 $a=b\cos C+1$,所以由余弦定理得 $a=b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1$,所以 $2a^2=a^2+b^2-c^2+2a$,所以 $a^2+c^2-b^2=ac$,所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$.又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.　　(5 分)

(2) 设 $\angle DCA=\alpha$,则 $\angle ADB=\alpha+\frac{\pi}{6},\angle BAD=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理有 $\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{AD}{\sin B}$,即 $\frac{BD}{\cos\alpha}=\frac{AD}{\sin\frac{\pi}{3}}$.在 $\triangle ACD$ 中,由正弦定理有 $\frac{DC}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{AD}{\sin\alpha}$.因为 $BD=DC$,所以 $\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\pi}{3}}$,即 $\sin\alpha\cos\alpha=\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}$,所以 $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $2\alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $2\alpha=\frac{2\pi}{3}$,

所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 或 $\alpha=\frac{\pi}{3}$(舍去).　　(8 分)

当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时,$A=\frac{\pi}{2},AC=2\sqrt{3}$,$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.　(10 分)



(第 17 题)

18. 解答:(1) 设"第 1 次取出的是一次性手套"为事件 $A$,"第 2 次取出的是非一次性手套"为事件 $B$,则 $P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{23}{50}$,$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$,所以在第 2 次取出的是非一次性手套的前提下,第 1 次取出的是一次性手套的概率为 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{15}{23}$.　　(5 分)公众号:高中试卷君

(2) 记取出的一次性手套的双数为 $X$,则 $X=0,1,2,3$,

$P(X=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=0.064, P(X=1)=\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=0.366, P(X=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=0.1$,则 $P(X=2)=1-0.064-0.366-0.1=0.47$,

则 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.064 | 0.366 | 0.47 | 0.1 |

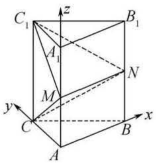
数学期望 $E(X)=0.366+2\times0.47+3\times0.1=1.606$.(12 分)

19. 解答:(1) 因为 $AC\perp AB$,且平面 $ABC\perp$平面 $ACC_1A_1$,平面 $ABC\cap$平面 $ACC_1A_1=AC$,所以 $AB\perp$平面 $ACC_1A_1$.又 $CM\subset$平面 $ACC_1A_1$,所以 $AB\perp CM$.因为 $M,N$ 分别为 $AA_1,BB_1$ 的中点,所以 $MN\parallel AB$,所以 $MN\perp CM$.因为 $AM=A_1M=3,AC=A_1C_1=3$,所以 $CM=C_1M=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$,所以 $CM^2+C_1M^2=18+18=36=CC_1^2$,所以 $CM\perp C_1M$.又因为 $MN,C_1M\subset$平面 $C_1MN,MN\cap C_1M=M$,所以 $CM\perp$平面 $C_1MN$. (5 分)

(2) 因为 $AA_1\perp$平面 $ABC,AB\perp AC$,所以以 $A$ 为原点,分别以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}$的方向为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,所以 $C(0,3,0),C_1(0,3,6),M(0,0,3),N(4,0,3)$,所以$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,6),\overrightarrow{C_1N}=(4,-3,-3),\overrightarrow{CM}=(0,-3,3)$.设平面 $CC_1N$ 的法向量为 $n=(x,y,z)$,则

$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{C_1N}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}6z=0,\\ 4x-3y-3z=0,\end{cases}$令 $x=3$,则 $n=(3,4,0)$.由(1)知 $CM\perp$平面 $C_1MN$,故可取平面 $C_1MN$ 的一个法向量 $m=(0,-1,1)$,因为

$\cos\langle m,n\rangle=\frac{m\cdot n}{|m||n|}=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$,故二面角 $C\text{-}C_1N\text{-}M$ 的正弦值为$\sqrt{1-\left(\frac{-2\sqrt{2}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{5}$. (12 分)



(第 19 题)

20. 解答:(1) 当 $a=1$ 时,$f(x)=e^x-\ln x\Rightarrow f'(x)=e^x-\frac{1}{x}(x>0)$,所以切线斜率 $k=f'(1)=e-1$.又 $f(1)=e$,所以 $f(x)$在点 $A(1,e)$处的切线方程为 $y-e=(e-1)(x-1)$,即 $y=(e-1)x+1$.(5 分)

(2) $f(x)=e^x-\frac{\ln x}{a}\Rightarrow f'(x)=e^x-\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}\left(xe^x-\frac{1}{a}\right)(x>0)$,易知 $y=xe^x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,且 $y\in(0,+\infty)$,又 $0<a<1\Rightarrow\frac{1}{a}>1$,所以存在唯一 $x_0\in(0,+\infty)$,使得 $x_0e^{x_0}-\frac{1}{a}=0$,即$e^{x_0}=\frac{1}{ax_0}\Leftrightarrow\ln x_0=-x_0-\ln a$.当 $0<x<x_0$ 时,$f'(x)<0,f(x)$为减函数,当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0,f(x)$为增函数,所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-\frac{\ln x_0}{a}=\frac{1}{ax_0}+\frac{x_0}{a}+\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{a}\left(x_0+\frac{1}{x_0}+\ln a\right)\geq\frac{1}{a}\left(2\sqrt{x_0\times\frac{1}{x_0}}+\ln a\right)=\frac{2+\ln a}{a}$,当且仅当 $x_0=\frac{1}{x_0}$,即 $x_0=1$ 时等号成立.所以当 $0<a<1$ 时,$f(x)\geq\frac{2+\ln a}{a}$.(12 分)

21. 解答:(1) 由对任意正整数 $m,n$ 都有 $a_{m+n}=a_n+a_m+2mn$,令 $m=1$,可得 $a_{n+1}=a_n+1+2n$,所以 $a_{n+1}-a_n=2n+1$.
当 $n\geq2$ 时,$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots+(a_n-a_{n-1})=1+3+5+\dots+2n-1=n^2$;
当 $n=1$ 时,$a_1=1$,符合上式,所以 $a_n=n^2$. (4 分)
(2) 由(1) 得 $a_n=n^2$,当 $n$ 为偶数时,
$S_n=(-1^2+2^2)+(-3^2+4^2)+\dots+\left[-(n-1)^2+n^2\right]=$
$3+7+11+\dots+(2n-1)=\frac{\frac{n}{2}(3+2n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$;

当 $n$ 为奇数时,$n-1$ 为偶数,$S_n=S_{n-1}+(-1)^na_n=S_{n-1}-a_n=\frac{n(n-1)}{2}-n^2=\frac{-n^2-n}{2}$.

综上所述,$S_n=\begin{cases}\frac{n^2+n}{2},n\text{为偶数},\\ \frac{-n^2-n}{2},n\text{为奇数}.\end{cases}$

若 $k$ 为偶数,则 $k+1$ 为奇数,由 $2S_k+S_{k+1}=0$,即 $k^2+k-\frac{(k+1)^2+k+1}{2}=0$,整理得 $k^2-k-2=0$,解得 $k=-1$(舍去)或 $k=2$;

若 $k$ 为奇数,则 $k+1$ 为偶数,由 $2S_k+S_{k+1}=0$,即 $-k^2-k+\frac{(k+1)^2+k+1}{2}=0$,整理得 $k^2-k-2=0$,解得 $k=-1$ 或 $k=2$,均不合题意,舍去.

综上,所求 $k$ 的值为 2. (8 分)

(3) 由 $b_n=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\ln\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

$=\ln\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+n^2+(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}$

$=\ln\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+n^2+n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}}$

$=\ln\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}}$

$=\ln\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=\ln\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

结合当 $x>0$ 时,$\ln(x+1)<x$,有 $b_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n<\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.故 $T_n<\frac{n}{n+1}$. (12 分)*公众号：高中试卷君*

22. 解答:(1) 将点 $C,D$ 代入椭圆方程有 $\begin{cases}\frac{1}{b^2}=1,\\ \frac{64}{25a^2}+\frac{9}{25b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$ 所以椭圆 $E$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. (4 分)

(2) 设 $P(x_0,y_0),A(m,0),B(n,0)$.

直线 $PD:y+\frac{3}{5}=\frac{y_0+\frac{3}{5}}{x_0+\frac{8}{5}}\left(x+\frac{8}{5}\right)$,

令 $y=0$,得 $x_N=\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}}$.直线 $PC:y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$,

令 $y=0$,得 $x_M=\frac{x_0}{y_0+1}$.

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=\left(n-\frac{x_0}{y_0+1}\right)\left(m-\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}}\right)$

$=\frac{(ny_0+n-x_0)(5my_0+8y_0+3m-3x_0)}{5y_0^2+8y_0+3}$.

令 $5my_0+8y_0+3m=-3ny_0-3n$,

则 $5m+8=-3n,3m=-3n$,得 $n=4,m=-4$,

则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=\frac{-3[(4y_0+4)^2-x_0^2]}{5y_0^2+8y_0+3}$

$=\frac{-3[(4y_0+4)^2-(4-4y_0^2)]}{5y_0^2+8y_0+3}=\frac{-12(5y_0^2+8y_0+3)}{5y_0^2+8y_0+3}$

$=-12$.

故存在 $A(-4,0)$ 和 $B(4,0)$,使得 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}$ 是定值,且定值为 $-12$. (12 分)

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。