2024 年茂名市高三年级第一次综合测试

数学参考答案

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	C	A	A	C	D

二、多选题

题号	9	10	11	12
答案	CD	BCD	ACD	ACD

1.【答案】C

【解析】集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则 $C=A\cap B=\{0,1\}$，所以集合 C 的子集个数为 $2^2=4$. 故选 C.

2.【答案】A

【解析】解不等式 $x^2-4x+3>0$ 得 $x>3$ 或 $x<1$，所以"$x<1$"是"$x^2-4x+3>0$"的充分不必要条件. 故选 A.

3.【答案】B

【解析】$C_5^2C_9^1=45$. 故选 B.

4.【答案】C

【解析】因为 $f'(x)=e^x+a$，所以 $f'(0)=e^0+a=1+a=2$，所以 $a=1$. 故选 C.

5.【答案】A

【解析】因为 $F_1(-c,0)$，因为直线 l 垂直于 x 轴，令 $x=-c$，代入椭圆方程可得 $\frac{(-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以 $|AB|=\frac{2b^2}{a}$，因为 $|AB|=|F_1F_2|$，所以 $\frac{2b^2}{a}=2c$，即 $\frac{a^2-c^2}{a}=c$，即 $c^2+ac-a^2=0$，所以 $e^2+e-1=0$，解得 $e=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故选 A.

6.【答案】A

【解析】因为 $y=f(x-2)$ 为奇函数，所以 $y=f(x)$ 关于 $(-2,0)$ 对称，又 $y=f(x)$ 关于原点对称，所以 $y=f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(2\ 023)=f(-1+2\ 024)=f(-1)=-f(1)=-2$. 故选 A.

7.【答案】C

【解析】令 $t=\frac{\pi}{4}+\alpha$，$t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，得 $\alpha=t-\frac{\pi}{4}$，则 $6\tan t+4\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=5\cos\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $6\tan t+4\sin t=5\sin 2t=10\sin t\cos t$，即 $(5\cos t+3)(\cos t-1)=0$，且 $\cos t<0$，那么 $\cos t=-\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2t=1-2\cos^2 t=\frac{7}{25}$. 故选 C.

8.【答案】D

【解析】由题意，$a_{n+1}=\frac{a_n}{na_n+1}$，两边取倒数可化为 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{na_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+n$，所以 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=1$，$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=2$，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=n-1$，由累加法可得，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$，因为 $a_1=8$，所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{1}{8}=\frac{(2n-1)^2}{8}$. 所以 $b_n=\left(\frac{1}{a_n}+\lambda\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left[\frac{(2n-1)^2}{8}+\lambda\right]\left(\frac{1}{2}\right)^n$. 因为数列 $\{b_n\}$ 是递减数列，故 $b_n<b_{n-1}$，即 $\left[\frac{(2n-1)^2}{8}+\lambda\right]\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$<\left[\frac{(2n-3)^2}{8}+\lambda\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，整理可得，$\lambda>\frac{-4n^2+20n-17}{8}=\frac{-4\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+8}{8}$，因为 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\left(\frac{-4\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+8}{8}\right)_{max}=\frac{-4\times\left(2-\frac{5}{2}\right)^2+8}{8}=\frac{7}{8}$，故 $\lambda\in\left(\frac{7}{8},+\infty\right)$．故选D．

9.【答案】CD

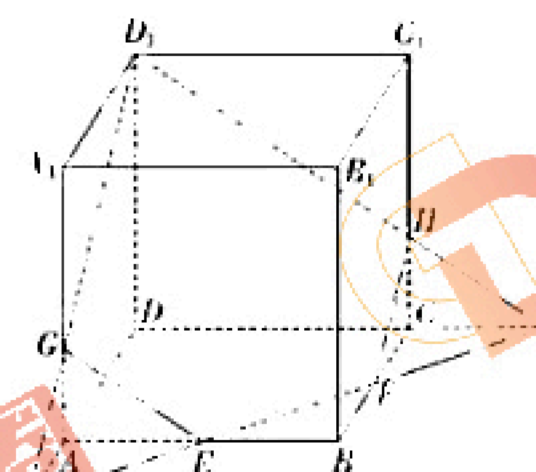
【解析】由题意，$f'(x)=-x^2+x+2=-(x-2)(x+1)$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-1,2)$ 上单调递增，若函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+1$ 在区间 $(m-1,m+4)$ 上单调，则 $m+4\leqslant-1$ 或 $m-1\geqslant2$ 或 $\begin{cases}m-1\geqslant-1,\\ m+4\leqslant2,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant-5$ 或 $m\geqslant3$ 或 $m\in\varnothing$，即 $m\leqslant-5$ 或 $m\geqslant3$．故选CD．

10.【答案】BCD

【解析】因为抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，所以 $p=2$，准线方程为 $x=-1$，A错误；过 A，B 和 AB 的中点 P 分别做准线的垂线 AA'，BB'，PP'，则 $|PP'|=\frac{|AA'|+|BB'|}{2}=\frac{|AF|+|BF|}{2}=\frac{|AB|}{2}$，连接 $P'A$，$P'B$，因为 $|PP'|=\frac{|AB|}{2}$，所以 $\angle AP'B=90^\circ$，以 AB 为直径的圆与准线相切于点 P'，B正确；抛物线的焦点为 $F(1,0)$，设 A，B 两点坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，由抛物线的焦半径公式可知 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p$，若 $|AB|=5$，又因为 $p=2$，此时 $x_1+x_2=3$，则线段 AB 中点的横坐标为 $\frac{3}{2}$，C正确；因为 $|AB|=|AA'|+|BB'|=2|PP'|\geqslant2p=4$，当且仅当 $AB\perp x$ 轴时等号成立，所以 $|AB|_{min}=2p=4$，若 $|AB|=4$，则这样的直线 l 有且只有一条，此时 $AB\perp x$ 轴，D正确．故选BCD．

11.【答案】ACD

【解析】EF 与 BC_1 所成的角即为 A_1C_1 与 BC_1 所成的角，为 60°，A正确；因为直线 A_1B，A_1D_1 所成角是 90°，所以过空间一点与两直线所成角为 60° 的直线有4条，B错误；易知平面 A_1EFC_1 为过 A_1，E，F 三点的截面，该截面为梯形，周长为 $\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{5}=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$，C正确；对于D，如图所示，取 AA_1，CC_1 的靠近 A，C 的三等分点 G，H，连接 GD_1，GE，HD_1，HF，易知 $GE/\!/HD_1$，$HF/\!/GD_1$，故点 D_1，G，E，F，H 共面，该截面图形为五边形，D正确．故选ACD．



12.【答案】ACD

【解析】易知 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不共线，若 $\angle AOB$ 是锐角，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=a-b>0$，易知 $A(a,b)$ 共有100种情况，其中 $a=b$ 共有10种，$a>b$ 与 $a<b$ 有相同种情况，即45种，所以 $\angle AOB$ 是锐角的概率为 $\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$，A正确；若 $\angle BAO$ 是锐角，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=a^2-a+b^2+b>0$ 恒成立，所以 $\angle BAO$ 是锐角的概率为1，B错误；若 $\triangle AOB$ 是锐角三角形，则 $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0,\\ \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}>0,\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a-b>0,\\ a-b<2,\\ a^2-a+b^2+b>0,\end{cases}$ 所以 $a-b=1$，共有9种情况，所以 $\triangle AOB$ 是锐角三角形的概率为 $\frac{9}{100}$，C正

确；若 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\cos^2\angle AOB}=\frac{1}{2}|a+b|\leqslant5$，则 $a+b\leqslant10$，易知该不等式共有 C_{10}^2 组正整数解，所以 $\triangle AOB$ 的面积不大于 5 的概率为 $\frac{9}{20}$，D 正确. 故选 ACD.

13.【答案】$1+i$

【解析】$\because z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$，$\therefore \bar{z}=1+i$.

14.【答案】$\frac{2\sqrt{6}+6}{3}a$

【解析】依次连接四个球的球心 O_1,O_2,O_3,O_4，则四面体 $O_1-O_2O_3O_4$ 为正四面体，且边长为 $2a$，所以 O_1 到底面 $O_2O_3O_4$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$，所以最高点到平台的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}a+2a=\frac{2\sqrt{6}+6}{3}a$.

15.【答案】$2+\sqrt{34}$

【解析】设点 $P(x,y)$，因为 $|PA|=2|PO|$，所以 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，化简得 $x^2+(y+1)^2=4$，所以点 P 的轨迹为以 $(0,-1)$ 为圆心，2 为半径的圆，又因为直线 $mx-y+4-3m=0$ 过定点 $(3,4)$，所以点 P 到直线 $mx-y+4-3m=0$ 的距离的最大值为点 $(0,-1)$ 到 $(3,4)$ 的距离加上圆的半径，故最大值为 $2+\sqrt{34}$.

16.【答案】$\left(\frac{11}{3},5\right)\cup\left(\frac{17}{3},\frac{23}{3}\right]$

【解析】由于 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上有且只有两个零点，所以 $\frac{T}{2}<\frac{\pi}{3}<\frac{3T}{2}$，即 $\frac{\pi}{\omega}<\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{\omega}\Rightarrow3<\omega<9$，由 $f(x)=0$ 得，$\omega x+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\because x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{6},\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore \begin{cases}\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{6}<\pi,\\2\pi<\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\leqslant3\pi\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\pi\leqslant\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{6}<2\pi,\\3\pi<\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\leqslant4\pi,\end{cases}$ 解得 $\frac{11}{3}<\omega<5$ 或 $\frac{17}{3}<\omega\leqslant\frac{23}{3}$，所以 ω 的取值范围是 $\left(\frac{11}{3},5\right)\cup\left(\frac{17}{3},\frac{23}{3}\right]$.

17. 解：(1) 由正弦定理及 $a\cos B-b\cos A-a+c=0$，

得 $\sin A\cos B-\sin B\cos A-\sin A+\sin C=0$，(1 分)

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，(2 分)

所以 $2\sin A\cos B-\sin A=0$，(3 分)

又 $A\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A\neq0$，$\therefore 2\cos B-1=0$，即 $\cos B=\frac{1}{2}$.(4 分)

又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.(5 分)

(2) 由 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 及 $a+c=4$，

所以 $\overrightarrow{BM}^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2+2\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}ac\cos B=\frac{1}{4}[(a+c)^2-ac]$

$\geqslant\frac{1}{4}\left[(a+c)^2-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\right]$

$=\frac{3}{16}(a+c)^2=3$.(9 分)

当且仅当 $a=c=2$ 时等号成立，所以 BM 的最小值为 $\sqrt{3}$.(10 分)

18. 解:(1)该品种石榴的平均质量为 $\bar{x}=20\times[370\times0.005+(390+410+450)\times0.010+430\times0.015]=416$,

所以该品种石榴的平均质量为 416 g.(3 分)

(2)由题可知,这 7 个石榴中,质量在$[380,400)$,$[400,420)$,$[420,440)$上的频率比为$0.010:0.010:0.015=2:2:3$,所以抽取的质量在$[380,400)$,$[400,420)$,$[420,440)$上的石榴个数分别为 2,2,3.(4 分)

(i)记 A="抽取的 3 个石榴不完全来自同一区间",B="这 3 个石榴恰好来自不同区间",

则 $P(A)=\dfrac{C_7^3-C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{34}{35}$,$P(AB)=\dfrac{C_2^1C_2^1C_3^1}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$,

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{12}{35}}{\frac{34}{35}}=\dfrac{6}{17}$,

即这 3 个石榴恰好来自不同区间的概率为$\dfrac{6}{17}$.(7 分)

(ii)由题意 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

则 $P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$,$P(X=1)=\dfrac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$,$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$,(10 分)

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(11 分)

所以 $E(X)=0\times\dfrac{4}{35}+1\times\dfrac{18}{35}+2\times\dfrac{12}{35}+3\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{9}{7}$.(12 分)

19. (1)解:由于$\dfrac{S_n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{2n+1}{6}$,(1 分)

则 $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,(2 分)

当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$,则 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2$,$n\geqslant2$;(4 分)

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1$ 符合上式,则 $a_n=n^2$,$n\in\mathbf{N}^*$.(5 分)

(2)证明:由于 $b_n=6\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{2n-1}{2n+1}$,(6 分)

那么 $T_n=6^n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\cdots\cdot\dfrac{n}{n+1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}\times\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{6^n}{(n+1)(2n+1)}$,(9 分)

$\because (n+1)(2n+1)-6\geqslant0$,$\therefore T_n\leqslant6^{n-1}$,(10 分)

那么$\sum\limits_{i=1}^{n}T_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}6^{i-1}=\dfrac{1-6^n}{1-6}=\dfrac{6^n-1}{5}$,即证.(12 分)

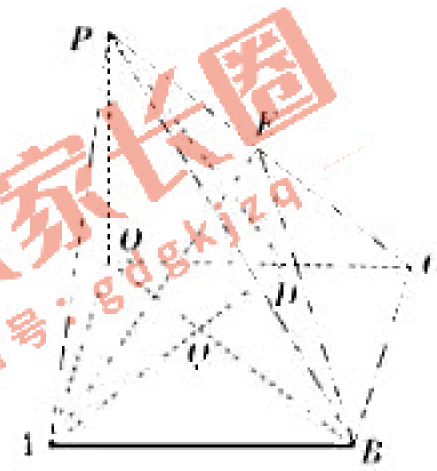
20. (1)证明:由于平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PDC\cap$ 平面 $ABCD=CD$,

过点 P 作 CD 的垂线交 CD 的延长线于点 O,则 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

连接 OB 交 AD 于 Q,连接 OA,

$\because PD=2$,$\angle PDC=120°$,

$\therefore OD=1$,$\therefore OC=AB=2$,(1 分)



又 $AB /\!/ CD$，$\angle ABC = 90°$，

$\therefore$ 四边形 $ABCO$ 为矩形，

$\therefore OA = BC = \sqrt{2}$，

$\therefore \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ODA \sim \mathrm{Rt}\triangle AOB$，(2 分)

$\therefore \angle OAD = \angle ABO$，

又$\because \angle OAD + \angle DAB = 90°$，

$\therefore \angle AOB = 90°$，即 $AD \perp OB$，(3 分)

又 $PO \perp$ 平面 $ABCD$、$AD \subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PO \perp AD$，又 $PO \cap BO = O$，(4 分)

$\therefore AD \perp$ 平面 POB，又$\because PB \subset$ 平面 POB，

$\therefore AD \perp PB$.（5 分）

(2)解：以 O 为坐标原点，OA，OC，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$C(0,2,0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$B(\sqrt{2},2,0)$，由于 E 在 PC 上，设 $\overrightarrow{PE} = \lambda\overrightarrow{PC}$，则 $E(0,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{AE} = (-\sqrt{2},2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，(6 分)

又平面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$，设直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角为 θ，

$\therefore \sin\theta = |\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\rangle| = \dfrac{|\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{2+4\lambda^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，(7 分)

解得 $\lambda = \dfrac{1}{2}$ 或 $\lambda = \dfrac{5}{2}$（舍去），(8 分)

$\therefore E\left(0,1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\therefore \overrightarrow{BA} = (0,-2,0)$，$\overrightarrow{BE} = \left(-\sqrt{2},-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{2},0,0)$，

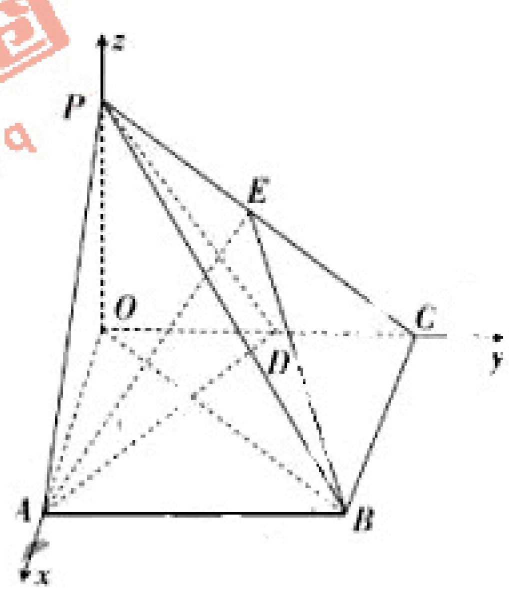
设平面 ABE 的法向量 $\boldsymbol{n}_1 = (x_1,y_1,z_1)$，平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}_2 = (x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}_1 = 0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}_1 = 0,\end{cases}\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}_2 = 0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}_2 = 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2y_1 = 0,\\ -\sqrt{2}x_1 - y_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0,\end{cases}\begin{cases}-\sqrt{2}x_2 = 0,\\ -\sqrt{2}x_2 - y_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0,\end{cases}$（9 分）

取 $x_1 = \sqrt{3}$，$y_2 = \sqrt{3}$ 得 $\boldsymbol{n}_1 = (\sqrt{3},0,2\sqrt{2})$，$\boldsymbol{n}_2 = (0,\sqrt{3},2)$，(11 分)

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}\times\sqrt{7}} = \dfrac{4\sqrt{154}}{77}$，

故平面 ABE 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\dfrac{4\sqrt{154}}{77}$.（12 分）



21. (1)解：因为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$，所以 $b=\sqrt{3}$，(1 分)

双曲线的一条渐近线为$\sqrt{3}x-ay=0$，因为双曲线的右顶点为$(a,0)$，设右顶点到渐近线的距离为 d，

由题意得$\begin{cases} d=\frac{|\sqrt{3}a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2+3=c^2, \end{cases}$(2 分)

解得$\begin{cases} a=1, \\ c=2, \end{cases}$(3 分)

则 E 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.(4 分)

(2)证明：①当$\angle PFA=90°$，即 $PF\perp AF$ 时，设点 $P(-2,y_p)$，

代入双曲线方程得，$(-2)^2-\frac{y_p^2}{3}=1$，解得 $y_p=\pm3$，取第二象限的点，则 $P(-2,3)$，

因为 $B(1,0)$，所以直线 BP 的斜率为 $k_{BP}=\frac{3-0}{-2-1}=-1$，(5 分)

所以直线 BP 的方程为 $y=-x+1$，令 $x=-1$，解得 $y=2$，即 $M(-1,2)$，

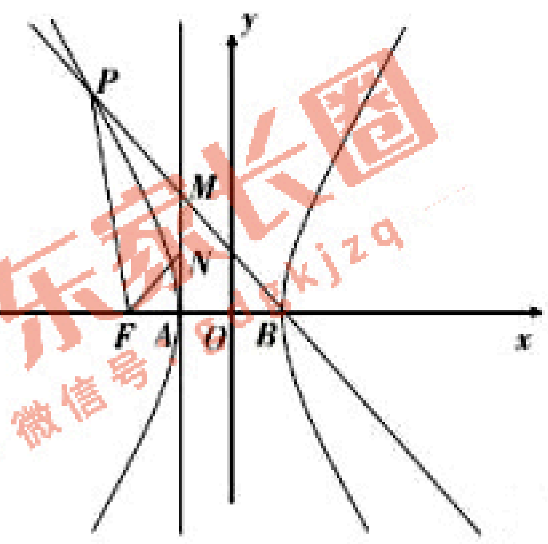
因为直线 FN 是$\angle PFA$ 的角平分线，且$\angle PFA=90°$，所以直线 FN 的斜率为 $k_{FN}=1$，

直线 FN 的方程为 $y=x+2$，令 $x=-1$，解得 $y=1$，即 $N(-1,1)$，(6 分)

此时$|AN|=\frac{1}{2}|AM|$，即 N 是 MA 的中点；(7 分)

②当$\angle PFA\neq90°$时，设直线 BP 的斜率为 k，则直线 BP 的方程为 $y=k(x-1)$，

联立方程$\begin{cases} y=k(x-1), \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 y 得$(3-k^2)x^2+2k^2x-(k^2+3)=0$，(8 分)



由韦达定理得，$x_Bx_P=\frac{k^2+3}{k^2-3}$，

又因为 $x_B=1$，所以 $x_P=\frac{k^2+3}{k^2-3}$，$y_P=k(x_P-1)=\frac{6k}{k^2-3}$，

点 $P\left(\frac{k^2+3}{k^2-3},\frac{6k}{k^2-3}\right)$，又因为 $F(-2,0)$，

所以 $k_{PF}=\frac{\frac{6k}{k^2-3}}{\frac{k^2+3}{k^2-3}+2}=\frac{6k}{3k^2-3}=\frac{2k}{k^2-1}$，(9 分)

由题意可知，直线 NF 的斜率存在，设为 k'，则直线 NF：$y=k'(x+2)$，

因为 FN 是$\angle PFA$ 的角平分线，所以$\angle PFB=2\angle NFB$，所以 $\tan\angle PFB=\tan2\angle NFB$，

又因为 $\tan\angle PFB=k_{PF}=\frac{2k}{k^2-1}$，$\tan2\angle NFB=\frac{2\tan\angle NFB}{1-\tan^2\angle NFB}=\frac{2k'}{1-k'^2}$，(10 分)

所以$\frac{2k}{k^2-1}=\frac{2k'}{1-k'^2}$，即 $k'k^2+(k'^2-1)k-k'=0$，

即$(k+k')(kk'-1)=0$，得 $k=-k'$或 $k=\frac{1}{k'}$，

由题意知 k 和 k'异号，所以 $k=-k'$，所以直线 FN 的方程为 $y=-k(x+2)$，

令 $x=-1$，可得 $y=-k$，即 $N(-1,-k)$，所以$|AN|=|-k|$，

直线 PB 的方程为 $y=k(x-1)$，令 $x=-1$，可得 $y=-2k$，即 $M(-1,-2k)$，所以$|AM|=|-2k|$，(11 分)

所以$\frac{|AN|}{|AM|}=\frac{|-k|}{|-2k|}=\frac{1}{2}$,即 N 是 MA 的中点.

综上,N 是 MA 的中点.(12 分)

22. (1)解:$\forall x_1,x_2\in[1,2]$,且 $x_1<x_2$,

$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{x_1^2}{2}+x_1-\frac{x_2^2}{2}-x_2\right|=\left|\left(\frac{x_1+x_2}{2}+1\right)(x_1-x_2)\right|$

$=\left|\frac{1}{2}(x_1+x_2)+1\right||x_1-x_2|<\left|\frac{1}{2}\times(2+2)+1\right||x_1-x_2|=3|x_1-x_2|$,

所以 $f(x)$ 是$[1,2]$上的"3 类函数".(2 分)

(2)解:因为 $f(x)$ 是$[1,e]$上的"2 类函数",不妨设 $x_1,x_2\in[1,e]$,且 $x_1<x_2$.

则 $2(x_1-x_2)<f(x_1)-f(x_2)<2(x_2-x_1)$ 恒成立.(3 分)

即 $g(x)=f(x)+2x$ 在$[1,e]$上单调递增,$h(x)=f(x)-2x$ 在$[1,e]$上单调递减,

所以 $\forall x\in[1,e]$,$g'(x)=f'(x)+2\geqslant0$,$h'(x)=f'(x)-2\leqslant0$ 恒成立,(4 分)

又 $f'(x)=axe^x-x-\ln x-1$,

所以 $\forall x\in[1,e]$,$-2\leqslant axe^x-x-\ln x-1\leqslant2$ 恒成立,

所以 $\forall x\in[1,e]$,$\frac{x+\ln x-1}{e^{x+\ln x}}=\frac{x+\ln x-1}{xe^x}\leqslant a\leqslant\frac{x+\ln x+3}{xe^x}=\frac{x+\ln x+3}{e^{x+\ln x}}$恒成立,(5 分)

记 $F(t)=\frac{t-1}{e^t}$,$G(t)=\frac{t+3}{e^t}$,$t=x+\ln x\in[1,e+1]$,(6 分)

则 $F'(t)=\frac{2-t}{e^t}$,$G'(t)=\frac{-2-t}{e^t}$,

所以 $F(t)$ 在$[1,2)$上单调递增,在$(2,e+1]$上单调递减,$G(t)$ 在$[1,e+1]$上单调递减,(7 分)

所以 $F(t)_{\max}=F(2)=\frac{1}{e^2}$,$G(t)_{\min}=G(e+1)=\frac{e+4}{e^{e+1}}$,(8 分)

所以 $a\in\left[\frac{1}{e^2},\frac{e+4}{e^{e+1}}\right]$.(9 分)

(3)证明:不妨设 $1\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant2$,

当 $x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$时,$\because|f(x_1)-f(x_2)|<2|x_2-x_1|\leqslant1$,$\therefore|f(x_1)-f(x_2)|<1$;(10 分)

当 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$时,由 $f(1)=f(2)$得

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-f(1)+f(2)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(1)|+|f(2)-f(x_2)|$

$<2(x_1-1)+2(2-x_2)=2-2(x_2-x_1)<1$,

所以 $\forall x_1,x_2\in[1,2]$,$|f(x_1)-f(x_2)|<1$.(12 分)