广东省2024届高三“百日冲刺”联合学业质量监测·数学

参考答案、提示及评分细则

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	A	B	C	D	B	C

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合要求。全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分。

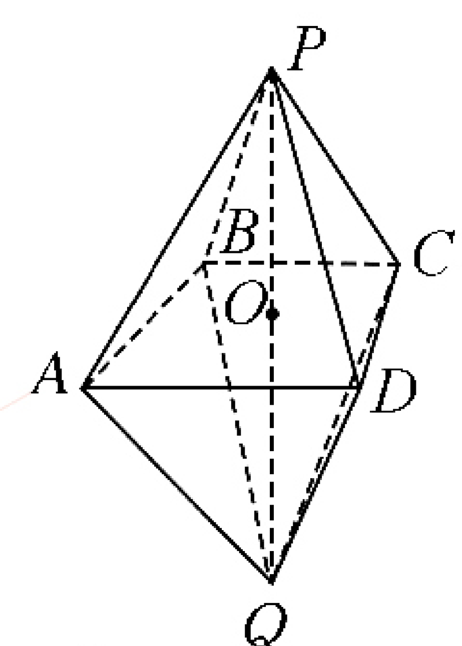
题号	9	10	11
答案	ABD	CD	BCD

1.D　由 $B=\{x\mid x^2+x-6<0\}=\{x\mid -3<x<2\}$,得 $A\cap B=\{x\mid -1<x<1\}$,故选 D.

2.A　因为 $z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}^4=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}+2=\frac{-2\mathrm{i}}{2}+2=2-\mathrm{i}$,故 $\bar{z}=2+\mathrm{i}$,所以在复平面内,复数 $\bar{z}$ 对应的点为 $(2,1)$,位于第一象限,故选 A.

3.A　由题意知 $a+b=1$,若 $E(X)=\frac{4}{3}$,则 $a+2b=\frac{4}{3}$,得 $a=\frac{2}{3}$,$b=\frac{1}{3}$,$D(X)=(\frac{4}{3}-1)^2\times\frac{2}{3}+(\frac{4}{3}-2)^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$,故充分性满足;若 $D(X)=\frac{2}{9}$,则 $(a+2b-1)^2a+(a+2b-2)^2b=ab^2+b(b-1)^2=-b^2+b=\frac{2}{9}$,解得 $b=\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$,则 $E(X)=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$,故必要性不满足.故选 A.

4.B　令 $y'=\mathrm{e}^x=\frac{1}{\mathrm{e}}$,得 $x=-1$,代入曲线方程得 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}$,所以 $|PQ|$ 的最小值即为点 $(-1,\frac{1}{\mathrm{e}})$ 到直线 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$ 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}^2+1}}$.故选 B.



5.C　四棱锥 $P-ABCD$ 与四棱锥 $Q-ABCD$ 的所有侧棱长均为2的四棱锥,可得点 P,Q 在底面 $ABCD$ 上的射影都是四边形 $ABCD$ 的外心,所以两射影重合,即 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$,所以平面 $APQ\perp$ 平面 $ABCD$,D 错误;由题意四边形 $ABCD$ 有外接圆,对角互补,故 A,B 错误,C 正确,故选 C.

6.D　由题意可得 $\begin{cases}|PF_1|=4|PF_2|\\|PF_1|+|PF_2|=2a\end{cases}$,解得 $|PF_1|=\frac{8a}{5}$,$|PF_2|=\frac{2a}{5}$,由 $|PF_1|-|PF_2|\leqslant 2c$,得 $\frac{8a}{5}-\frac{2a}{5}\leqslant 2c$,得 $e=\frac{c}{a}\geqslant\frac{3}{5}$,而 $e<1$,所以椭圆 C 的离心率的取值范围是 $[\frac{3}{5},1)$,故选 D.

7.B　$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)=\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta=\cos^2\alpha-\cos^2\beta=-\frac{1}{12}$,又 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{4}$,所以 $\sin(\beta-\alpha)=-\frac{1}{4}$,则 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$,所以 $\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=\frac{7}{9}$,故选 B.

8.C　由 $h(x+1)+h(x-1)=2$,用 $x+1$ 代替 x 可得 $h(x+2)=2-h(x)$,同理可得 $h(x+4)=2-h(x+2)=2-[2-h(x)]=h(x)$,所以 $h(x)$ 的周期为4.又 $h(2-x)$ 是偶函数,所以 $h(2-x)=h(2+x)$,所以 $h(x)=h(4-x)$,而又由 $h(x+4)=h(x)$,得 $h(-x+4)=h(-x)$,所以 $h(x)=h(-x)$,即 $h(x)$ 是偶函数,再由 $h(x+1)+h(x-1)=2$,赋值得 $h(1)+h(3)=2$,$h(2)+h(4)=2$,$h(0)+h(2)=2$,故 $h(1)+h(2)+h(3)+h(4)=4$,又 $h(2)=0$,所以 $h(0)=2$,故 $\sum\limits_{n=-103}^{103}h(n)=2\sum\limits_{n=1}^{103}h(n)+h(0)=2\times4\times25+2(h(1)+h(2)+h(3))+2=200+4+2=206$,故选 C.

9.ABD　由图象可知:$A=2$,周期 $T=4(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12})=\pi$,$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,

由$\begin{cases} f(\frac{\pi}{12})=2\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)=2 \\ |\varphi|<\frac{\pi}{2} \end{cases}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，故函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$. 故 A 正确；

对于 B，$f(\frac{4\pi}{3})=0$，故 B 正确；

对于 C，当 $-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{6}$ 时，$-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 0$，所以 $y=f(x)$ 在 $[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}]$ 上不单调，故 C 错误；

对于 D，将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $y=2\sin(2x-2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})=2\sin 2x$，再把横坐标伸长为原来的 2 倍，可得 $y=2\sin x$ 的图象，故 D 正确. 故选 ABD.

10. CD　由已知，抛物线 $C:y^2=4x$，$\therefore p=2$，$\frac{p}{2}=1$，焦点 $F(1,0)$，不妨设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设 A,B 到准线的距离分别为 d_A,d_B.

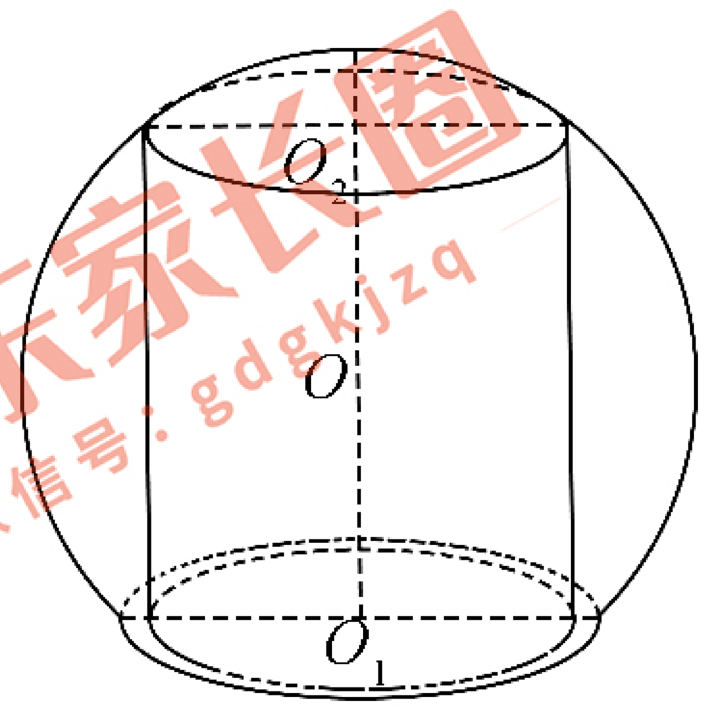
对于 A，$\because$ 由标准方程知，抛物线顶点在原点，开口向右，$x_1\geqslant 0$，$\therefore$ 由抛物线的定义 $|FA|=d_A=x_1+\frac{p}{2}=x_1+1\geqslant 1$，当 $|FA|=1$ 时，此时 A 与坐标原点重合，直线与抛物仅有一个交点，即 $|FA|\neq 1$，$|FA|>1$，故选项 A 错误；

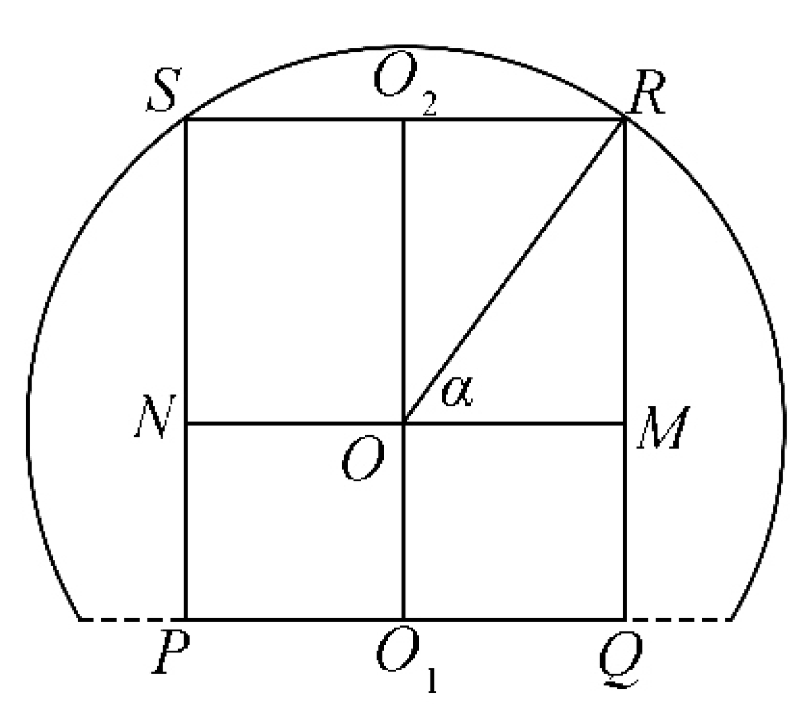
对于 B，$\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+1 \end{cases}$ 消去 x，化简得 $y^2-4my-4=0(\Delta>0)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，$\because y^2=4x$，$\therefore x=\frac{y^2}{4}$，$\therefore x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{16}=1$，$\because \overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$，$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=1-4=-3<0$，$\therefore \cos\angle AOB=\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}<0$，$\therefore \angle AOB>\frac{\pi}{2}$，$\therefore$ 不存在实数 m，使得 $\angle AOB<\frac{\pi}{2}$，选项 B 错误；

对于 C，$\overrightarrow{AF}=(1-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$，$\because \overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，$\therefore (1-x_1,-y_1)=2(x_2-1,y_2)=(2x_2-2,2y_2)$，$\therefore -y_1=2y_2$，又由选项 B 判断过程知 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，$\therefore$ 解得 $y_1=2\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$，$m=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 或 $y_1=-2\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{2}$，$m=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\therefore$ 若 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则 $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$，选项 C 正确；

对于 D，由题意，$x_1\neq 4$，$x_2\neq 4$，$y_1\neq 4$，$y_2\neq 4$，直线 PA 与 PB 的倾斜角互补时，斜率均存在，且 $k_{PA}=-k_{PB}$，$\therefore \frac{y_1-4}{x_1-4}=-\frac{y_2-4}{x_2-4}$，代入 $x_1=\frac{y_1^2}{4}$，$x_2=\frac{y_2^2}{4}$，化简得 $y_1+y_2+8=0$，由选项 B 的判断知，$y_1+y_2=4m$，$\therefore 4m+8=0$，$\therefore m=-2$，故选项 D 正确. 故选 CD.

11. BCD　过 R 作圆柱 O_1O_2 的轴截面 $PQRS$，过 O 作 $MN\perp O_1O_2$ 交圆柱 O_1O_2 的轴截面的边于 M,N，作出如下的直观图和轴截面图.





当 $|PQ|$ 取得最大值时，RO 与圆柱 O_1O_2 的下底面所成的角 α 取得最小值，设为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{9-OO_1^2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $\theta=\frac{\pi}{6}$，所以 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，A 错误；

因为 $OM=3\cos\alpha$，$MR=3\sin\alpha$，

所以 $V=\pi\cdot OM^2\cdot QR=\pi\cdot(3\cos\alpha)^2(OO_1+3\sin\alpha)=\frac{27\pi}{2}\cos^2\alpha(1+2\sin\alpha)$，B 正确；

令 $\sin\alpha=t\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，所以 $V=\frac{27\pi}{2}(1-t^2)(1+2t)=\frac{27\pi}{2}(-2t^3-t^2+2t+1)$，

所以 $V'=\frac{27\pi}{2}(-6t^2-2t+2)$，

所以 $V'=\frac{27\pi}{2}(-6t^2-2t+2)\leqslant\frac{27\pi}{2}\times\left[-6\times(\frac{1}{2})^2-2\times\frac{1}{2}+2\right]=-\frac{27\pi}{4}<0$，

所以 $V=\frac{27\pi}{2}(-2t^3-t^2+2t+1)$ 在 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ 时单调递减，

所以 $0=V(1)<V\leqslant V(\frac{1}{2})=\frac{27\pi}{2}\times[-2\times(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})^2+2\times\frac{1}{2}+1]=\frac{81\pi}{4}$，即 $0<V\leqslant\frac{81\pi}{4}$，所以 C、D 正确. 故选 BCD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 1　$x^{2\,024}$ 的项为 $C_{2\,024}^{2\,023}x\cdot(-x)^{2\,023}+ax^{2\,024}$，则 $a-2\,024=-2\,023$，得 $a=1$.

13. $-5\,050$　等差数列 $a_n=1-2n$，所以 $S_n=\frac{n(-1+1-2n)}{2}=-n^2$，所以 $\frac{S_n}{n}=-n$，显然数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 100 项的和为 $\frac{100\times(-1-100)}{2}=-5\,050$.

14. $\frac{3\sqrt{10}-7}{6}$　因为 $\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+8=0$，即 $\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+9\boldsymbol{e}^2=1$，可得 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{e}|=1$，

设 $\boldsymbol{e}=(1,0)$，$\boldsymbol{a}=(x,y)$，则 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{e}=(x-3,y)$，则 $(x-3)^2+y^2=1$，

设 $\begin{cases}x=3+\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$，则 $\boldsymbol{a}=(3+\cos\theta,\sin\theta)$，

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{b}=(-\frac{\sin\theta}{2},\frac{3+\cos\theta}{2})$ 或 $\boldsymbol{b}=(\frac{\sin\theta}{2},-\frac{3+\cos\theta}{2})$，

因为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{c}=(3+\cos\theta-\frac{\sin\theta}{2},\frac{3}{2}+\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2})$ 或 $\boldsymbol{c}=(3+\cos\theta+\frac{\sin\theta}{2},-\frac{3}{2}+\sin\theta-\frac{\cos\theta}{2})$，

令 $\boldsymbol{c}=(m,n)$，则 $(m-3)^2+(n-\frac{3}{2})^2=\frac{5}{4}$ 或 $(m-3)^2+(n+\frac{3}{2})^2=\frac{5}{4}$，

根据对称性，可只考虑 $(m-3)^2+(n-\frac{3}{2})^2=\frac{5}{4}$，

由 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}^2=m-\frac{1}{3}(m^2+n^2)=-\frac{1}{3}[(m-\frac{3}{2})^2+n^2]+\frac{3}{4}$，

记点 $A(3,\frac{3}{2})$、$B(\frac{3}{2},0)$、$P(m,n)$，则 $|AB|=\sqrt{(3-\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$|PA|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以 $|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}|\geqslant||\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{AB}||=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2}$，

当且仅当点 M 为线段 AB 与圆 $(x-3)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{5}{4}$ 的交点时，等号成立，

所以 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}^2=-\frac{1}{3}[(m-\frac{3}{2})^2+n^2]+\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}|\overrightarrow{PB}|^2+\frac{3}{4}\leqslant-\frac{1}{3}\times(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2})^2+\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{10}-7}{6}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

15. 解：(1) 由条件与余弦定理可知，$b\cdot c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=2a\cos B\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，…… 2 分

整理得 $a^2+b^2-c^2=2(a^2+b^2-c^2)\cos B$，…… 4 分

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $0<C<\frac{\pi}{2}$，则 $a^2+b^2-c^2\neq0$，…… 5 分

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. …… 6 分

(2) 由 $\angle ADB=2\angle CBD$ 得，$\angle ADB=\angle ACB+\angle CBD$，所以 $\angle ACB=\angle CBD$，则 $BD=CD$，所以 $\angle DBC=\angle C=\frac{\pi}{4}$. …… 8 分

由 (1) 可知 $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，则 $A=\frac{5}{12}\pi$，$\angle ABD=\frac{\pi}{12}$，…… 10 分

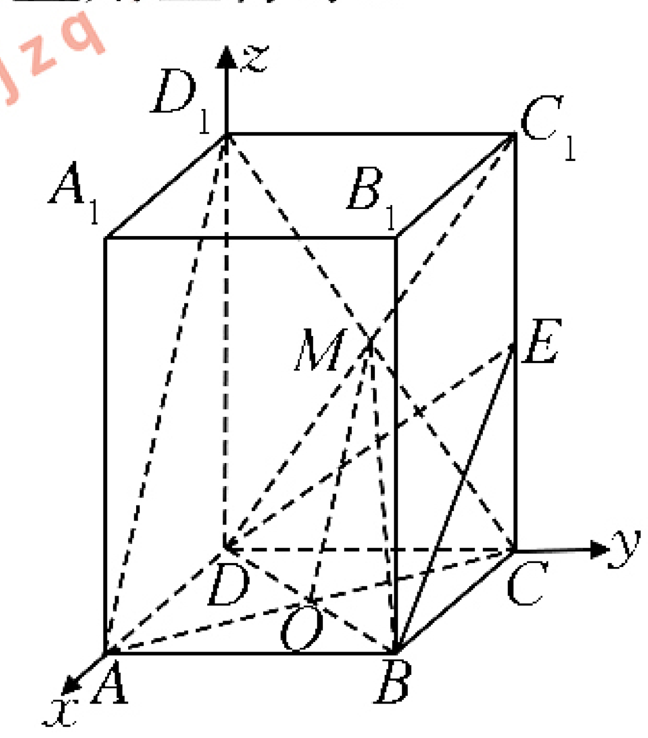
则$\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}AB\cdot BD\sin\frac{\pi}{12}}=\dfrac{\sin A\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\sin C\cdot\sin\frac{\pi}{12}}=2+\sqrt{3}$. ………………………………………… 13 分

16.(1)证明:连接 AC,则 AC 与 BD 交于点 O,连接 CM 并延长,则 CM 与 DD_1 交于点 D_1,所以 M 为 CD_1 的中点. ……………………………………………………………………………………… 2 分

由于底面 $ABCD$ 是正方形,所以 O 为 AC 的中点,则 OM 为$\triangle ACD_1$ 的中位线,

所以 $OM// AD_1$. …………………………………………………………………………………… 4 分

(2)解:以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $D(0,0,0)$,$B(2,2,0)$,$M(0,1,\sqrt{2})$,$E(0,2,\sqrt{2})$,

则$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{DM}=(0,1,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{DE}=(0,2,\sqrt{2})$, ………………………… 6 分

设平面 BDM 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x_1+2y_1=0,\\ y_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$取 $x_1=1$,则 $\boldsymbol{m}=\left(1,-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ……………… 9 分

设平面 BDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x_2+2y_2=0,\\ 2y_2+\sqrt{2}z_2=0,\end{cases}$取 $x_2=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,\sqrt{2})$, ……………… 12 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{3}{2\sqrt{\frac{5}{2}}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. ………………………………………………………………… 14 分

故平面 MBD 与平面 EBD 夹角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. ………………………………………………… 15 分

17.解:(1)依题可知,第一个图形中第一个小矩形面积为 $0.04>2.8\%$,

所以 $80<k<90$, …………………………………………………………………………………… 1 分

所以$(k-80)\times0.004=2.8\%$,解得临界值 $k=87$, ………………………………………………… 3 分

于是错检率 $g(k)=0.006\times(90-87)+10\times0.004=0.058=5.8\%$. ……………………………… 5 分

(2)当 $k\in[80,90)$时,

$f(k)=(k-80)\times0.004=0.004k-0.320$,

$g(k)=(90-k)\times0.006+0.004\times10=0.580-0.006k$,

所以 $h(k)=f(k)+g(k)=0.004k-0.320+0.580-0.006k=-0.002k+0.260>0.080$. ……………… 8 分

当 $k\in[90,100]$时,

$f(k)=0.004\times10+(k-90)\times0.026=0.026k-2.300$,

$g(k)=(100-k)\times0.004=-0.004k+0.4$,

所以 $h(k)=f(k)+g(k)=0.026k-2.300-0.004k+0.4=0.022k-1.900\geqslant0.080$, …………… 11 分

故 $h(k)=\begin{cases}0.26-0.002k,80\leqslant k<90\\ 0.022k-1.900,90\leqslant k\leqslant100\end{cases}$. …………………………………………………… 13 分

所以 $h(k)$在区间$[80,100]$的最小值为 0.080. …………………………………………………… 15 分

18.解:(1)设 $A(x_1,y_1)$,$B(-x_1,-y_1)$,$M(x_2,y_2)$,

$\therefore k_{AM}\cdot k_{BM}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=2$. …………………………………………… 2 分

$\because$点 A,M 在双曲线上,

$\therefore\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减得 $k_{AM}\cdot k_{BM}=\dfrac{b^2}{a^2}=2$. ……………………………………… 4 分

$\because||MF_1|-|MF_2||=2$,$\therefore$由双曲线的定义可知,$||MF_1|-|MF_2||=2a=2$,解得 $a=1$, ………… 5 分

$\therefore b^2=2$, …………………………………………………………………………………………… 6 分

$\therefore$双曲线 Γ 的标准方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………… 7 分

(2)∵点 O 到直线 l':$y=tx+m(t>0)$ 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{t^2+1}}=\sqrt{2}$, ………………………… 8 分

∴$|m|=\sqrt{2t^2+2}$,∴$m^2=2t^2+2$, ………………………… 9 分

联立 $\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{2}=1,\\ y=tx+m,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(2-t^2)x^2-2tmx-m^2-2=0(t>0$ 且 $t\neq\sqrt{2})$,

设 $C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$,∴$x_3+x_4=\dfrac{2tm}{2-t^2}$,$x_3x_4=\dfrac{m^2+2}{t^2-2}$,

∴$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=x_3x_4+y_3y_4=x_3x_4+(tx_3+m)(tx_4+m)=(1+t^2)x_3x_4+mt(x_3+x_4)+m^2=(1+t^2)\dfrac{m^2+2}{t^2-2}+$

$mt\times\dfrac{2tm}{2-t^2}+m^2=\dfrac{2t^2+2-m^2}{t^2-2}=0$,

∴$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}$,∴$OC\perp OD$. ………………………… 12 分

∵N 为 CD 的中点,O 为坐标原点且 $|ON|=2\sqrt{5}$,

∴$|CD|=2|ON|=4\sqrt{5}$,$|CD|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\sqrt{1+t^2}\dfrac{\sqrt{8(m^2-t^2+2)}}{|2-t^2|}$,

将 $m^2=2(t^2+1)$ 代入上式,∴$|CD|=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+4}}{|2-t^2|}=4\sqrt{5}$, ………………………… 15 分

∴$\begin{cases}t=1,\\ m^2=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t=2,\\ m^2=10,\end{cases}$ ∴直线 l' 的方程为 $y=x\pm2$ 或 $y=2x\pm\sqrt{10}$. ………………………… 17 分

19.(1)解:令 $h(x)=g(x)-f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\cos x-1$,$h'(x)=x-\sin x$, ………………………… 1 分

令 $k(x)=x-\sin x$,则 $k'(x)=1-\cos x\geqslant0$,

所以 $k(x)=x-\sin x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, ………………………… 3 分

所以 $k(x)\geqslant k(0)=0$,即 $h'(x)\geqslant0$,

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$,

所以 $g(x)\geqslant f(x)$ 成立. ………………………… 5 分

(2)证明:①当 $0<m<n<\dfrac{\pi}{2}$ 时,要证 $\dfrac{\sin m-\sin n}{m-n}>\cos n$,

即证 $(m-n)\cos n-\sin m+\sin n>0$, ………………………… 6 分

令 $r(x)=(x-n)\cos n-\sin x+\sin n$,其中 $0<x<n$, ………………………… 7 分

则需要证明 $r(m)>0$.

$r'(x)=\cos n-\cos x$, ………………………… 8 分

令 $p(x)=\cos n-\cos x$,则函数 $p(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增,

所以当 $0<x<n$ 时,$p(x)<p(n)=0$,

所以 $r'(x)<0$,所以 $r(x)$ 在 $(0,n)$ 上单调递减, ………………………… 10 分

所以 $r(x)>r(n)=0$,故 $r(m)>r(n)=0$,

所以当 $0<m<n<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\dfrac{\sin m-\sin n}{m-n}>\cos n$. ………………………… 12 分

②由(1)知:$\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}(x>0)$,$f'(x)=\sin x$,

所以 $k_i=\dfrac{f'(a_{i+1})-f'(a_i)}{a_{i+1}-a_i}=\dfrac{\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}-\sin\dfrac{1}{2^i}}{\dfrac{1}{2^{i+1}}-\dfrac{1}{2^i}}>\cos\dfrac{1}{2^i}>1-\dfrac{1}{2^{2i+1}}$, ………………………… 14 分

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}k_i>(1-\dfrac{1}{2^3})+(1-\dfrac{1}{2^5})+\cdots+(1-\dfrac{1}{2^{2n-1}})$

$=(n-1)-\dfrac{\dfrac{1}{8}[1-(\dfrac{1}{4})^{n-1}]}{1-\dfrac{1}{4}}=n-\dfrac{7}{6}+\dfrac{1}{6}\cdot(\dfrac{1}{4})^{n-1}>\dfrac{6n-7}{6}$. ………………………… 17 分