参考答案及解析

2023—2024 学年度上学期高三年级七调考试·数学

一、选择题

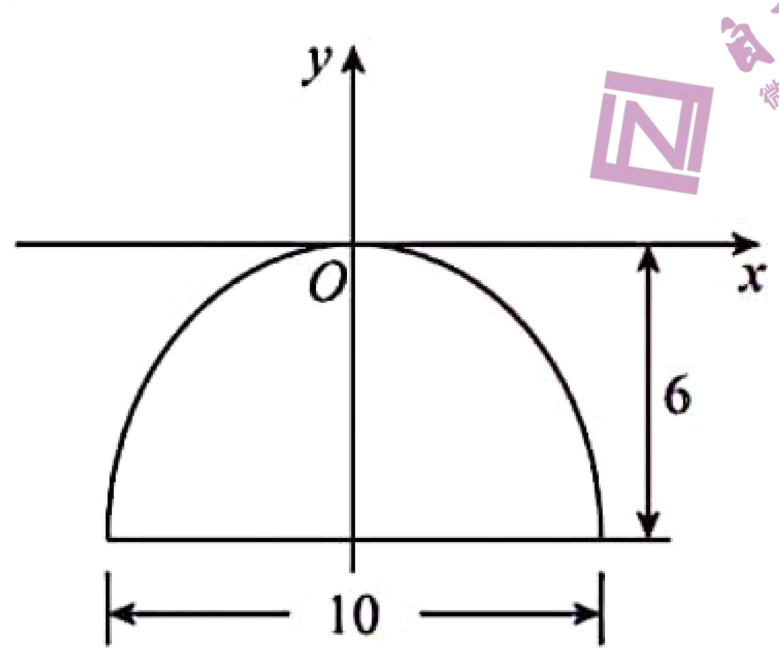
1. B【解析】$z=\frac{2+i^7}{(1-i)^2}=\frac{2-i}{-2i}=\frac{(2-i)i}{2}=\frac{1}{2}+i$，所以 z 在复平面内对应的点的坐标为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

2. D【解析】由题知选项 A，B，C 中的曲线既有对称轴，又有对称中心，选项 D 中的曲线只有对称轴，没有对称中心.

3. B【解析】因为 $l_1\perp l_2$，所以 $ab-2\times1=0$，即 $ab=2$，所以 $a^2+b^2\geqslant 2ab=4$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

4. B【解析】由题得 $a^2-b^2=b^2+\frac{1}{2}a^2$，所以 $a^2=4b^2$，所以双曲线 $C_2:\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{2b^2}=1$，所以 C_2 的渐近线方程为 $\sqrt{2}x\pm y=0$.

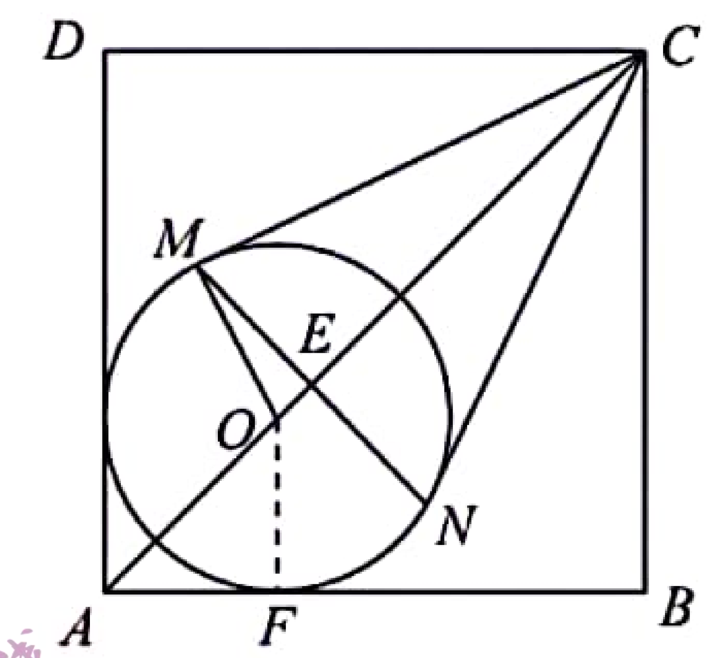
5. A【解析】如图，



设该抛物线的方程为 $x^2=-2py$，易知抛物线经过点 $(5,-6)$，所以 $5^2=-2p\times(-6)$，解得 $p=\frac{25}{12}$，故该抛物线的顶点到焦点的距离为 $\frac{p}{2}=\frac{25}{24}$，故竖直悬挂的闪光灯距离水面的距离为 $d=6-\frac{25}{24}\approx4.96$ 米.

6. D【解析】易知 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，设 $P(x,y)(y\neq0)$，则 $\frac{y}{x+a}+\frac{y}{x-a}=1$，即 $2xy=x^2-a^2$，又 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，所以 $x^2-a^2=\frac{a^2}{b^2}y^2$，即 $2xy=\frac{a^2}{b^2}y^2(y\neq0)$，所以 $y=\frac{2b^2}{a^2}x$，即直线 $y=\frac{2b^2}{a^2}x$ 与双曲线有公共点. 联立 $\begin{cases}b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,\\ y=\frac{2b^2}{a^2}x,\end{cases}$ 得 $b^2x^2-a^2\cdot\frac{4b^4}{a^4}x^2=a^2b^2$，即 $x^2\left(\frac{a^2-4b^2}{a^2}\right)=a^2$，要使方程有根，则 $a^2>4b^2=4(c^2-a^2)$，即 $\frac{c^2}{a^2}=e^2<\frac{5}{4}$，解得 $1<e<\frac{\sqrt{5}}{2}$.

7. A【解析】记 OC 与 MN 相交于 E，过 O 作 AB 的垂线，与 AB 相交于 F，如图所示，



$OM=2$ 丈，$MN=\sqrt{3}OM=2\sqrt{3}$ 丈，则 $ME=\frac{1}{2}MN=\sqrt{3}$ 丈，在 $\mathrm{Rt}\triangle MOE$ 中，$\sin\angle MOE=\frac{ME}{MO}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\angle MOE=60^\circ$，在 $\mathrm{Rt}\triangle MOC$ 中，$OC=2OM=4$ 丈，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOF$ 中，$OF=2$ 丈，$\angle OAF=45^\circ$，则 $OA=2\sqrt{2}$ 丈，所以 $AC=OC+OA=4+2\sqrt{2}$ 丈.

8. A【解析】令 $g(x)=\frac{xf(x)}{e^x}$，$x>0$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)+f(x)-xf(x)}{e^x}>0$，所以 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $(x+4)f(x+4)<3e^{x+2}$，得 $\frac{(x+4)f(x+4)}{e^{x+4}}<\frac{3f(3)}{e^3}$，所以 $g(x+4)<g(3)$，所以 $0<x+4<3$，解得 $-4<x<-1$.

二、选择题

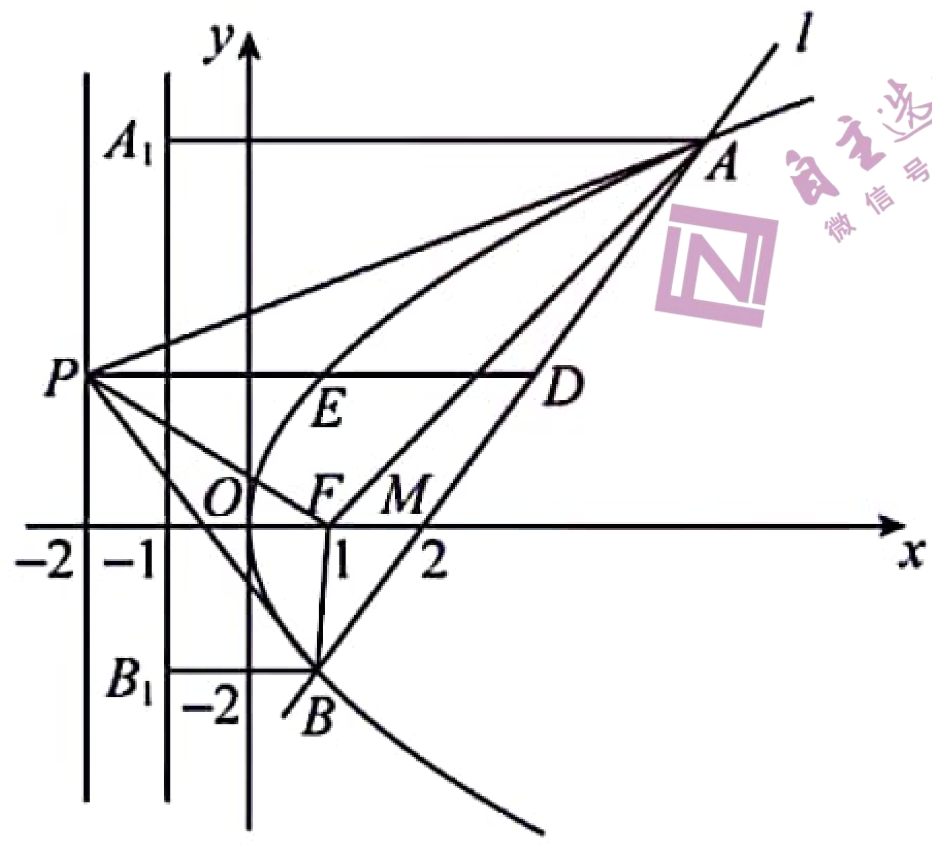
9. AC【解析】圆 $C_2:(x-2-2\cos\alpha)^2+(y+2\sin\alpha)^2=1$ 的圆心 $C_2(2+2\cos\alpha,-2\sin\alpha)$，半径 $R=1$，令 $\begin{cases}x=2+2\cos\alpha,\\ y=-2\sin\alpha,\end{cases}$ 消去 α 得 $(x-2)^2+y^2=4$，即圆心 C_2 在圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 的圆周上，且半径为 2. 若圆 C_1 与圆 C_2 外切，则圆 C_1 的方程为 $(x-2)^2+y^2=1$，即 $x^2+y^2-4x+3=0$；若圆 C_1 与圆 C_2 内切，则圆 C_1 的方程为 $(x-2)^2+y^2=9$，即 $x^2+y^2-4x-5=0$.

10. BD【解析】对于 A，不妨取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，满足题意，但是 $\cos\alpha>\cos\beta$，A 错误；对于 B，$\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，因为 $\sin\alpha<\sin\beta$，所以 $\alpha>\beta$，因为 $y=\cos x$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，所以 $\cos\alpha<\cos\beta$，B 正确；对于 C，不妨取 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$，$\beta=\frac{7\pi}{6}$，满足题意，而 $\tan\alpha=1>\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，C 错误；对于 D，$\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，因为

$\sin\alpha<\sin\beta$，所以 $\alpha<\beta$，因为 $y=\tan x$ 在区间 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 上单调递增，所以 $\tan\alpha<\tan\beta$，D 正确.

11. BCD【解析】当 $y=0$ 时，$x^4=4x^2$，解得 $x=0$ 或 2 或 -2，三个整点 $(0,0)$，$(2,0)$，$(-2,0)$，当 $y\geqslant1$ 时无解，所以共有 3 个整点，A 错误；$x^2+y^2=\frac{4(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\leqslant4$，在曲线 C 上取一点 $P(x,y)$ 到原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant2$，B 正确；在曲线 C 上取一点 M，关于直线 $y=x$ 的对称点为 N，设 $N(x,y)$，则 $M(y,x)$，M 在曲线 C 上，所以 $(x^2+y^2)^2=4(y^2-x^2)$，C 正确；直线 $y=kx$ 与曲线 C 一定有公共点 $(0,0)$，因为直线 $y=kx$ 与曲线 C 只有一个公共点，联立 $\begin{cases}(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2),\\ y=kx,\end{cases}$ 得 $x^4(1+k^2)^2=4x^2(1-k^2)$，所以 $1-k^2\leqslant0$，解得 $k\geqslant1$ 或 $k\leqslant-1$，D 正确.

12. BD【解析】由题意得 $\frac{p}{2}=1$，解得 $p=2$，则 $C:y^2=4x$. 过 A，B 两点分别作准线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，如图所示，则 $|AF|=|AA_1|$，$|BF|=|BB_1|$.



设直线 $l:x=my+2(m\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，切线 $PA:y=k(x-x_1)+y_1$. 联立 $\begin{cases}x=my+2,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-8=0$，$\Delta_1>0$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8$，所以 $y_D=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$，$x_D=my_D+2=2m^2+2$，即 $D(2m^2+2,2m)$. 联立 $\begin{cases}y=k(x-x_1)+y_1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $ky^2-4y+4(y_1-kx_1)=0$，所以 $k\neq0$，$\Delta_2=16-16k\left(y_1-\frac{1}{4}ky_1^2\right)=0$，所以 $k=\frac{2}{y_1}$，则切线 $PA:y=\frac{2}{y_1}(x-x_1)+y_1$，即 $y_1y=2(x+x_1)$ ①，同理得切线 PB：$y_2y=2(x+x_2)$ ②，联立①②得 $x_P=\frac{y_1y_2}{4}=-2$，$y_P=\frac{y_1+y_2}{2}=2m=y_D$，即 $P(-2,2m)$，所以点 P 在直线 $x=-2$ 上，$PD\perp y$ 轴，故 A 错误，D 正确；在 $y^2=4x$ 中，令 $y=2m$，得 $x=m^2$，所以 $E(m^2,2m)$，所以 E 是 PD 的中点，故 B 正确；$|PF|=\sqrt{9+4m^2}$，$|AF|+|BF|=x_1+x_2+2=m(y_1+y_2)+6=4m^2+6\neq2|PF|$，所以 $|AF|$，$|PF|$，$|BF|$ 不成等差数列，故 C 错误.

三、填空题

13. $(x+1)^2+y^2=3$（答案不唯一）【解析】设圆 C 的圆心坐标为 (a,b)，因为直线 $l:x-y+3=0$ 被圆 C 所截得的弦长为 2，圆的半径为 $\sqrt{3}$，所以 $\left(\frac{|a-b+3|}{\sqrt{2}}\right)^2+1^2=(\sqrt{3})^2$，整理得 $a-b+3=2$ 或 $a-b+3=-2$，所以 $a-b=-1$ 或 $a-b=-5$. 可取 $a=-1$，$b=0$，此时圆 $C:(x+1)^2+y^2=3$.

14. $\frac{2}{3}$【解析】在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\sin C=3\sin A$，由正弦定理得 $c=3a$，所以 $b^2=2ac=6a^2$，由余弦定理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+9a^2-6a^2}{2a\cdot3a}=\frac{2}{3}$.

15. 8【解析】由题意，任意一个长方形 R 的四个顶点都在同一个圆上，则该圆的方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2=4$，即半径为 $r=2$，若圆心与长方形中相邻的两个顶点的两条射线夹角大小为 θ，$\theta\in(0,\pi)$，则长方形面积 $S=4\times\frac{1}{2}\times r^2\sin\theta=8\sin\theta$，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$S_{\max}=8$.

16. $\sqrt{2}$【解析】由题得 $3x^2+3y^2-10cx+3c^2=0$，所以 $x^2+y^2+2cx+c^2=4x^2+4y^2-8cx+4c^2$，所以 $(x+c)^2+y^2=4[(x-c)^2+y^2]$，所以 $\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=2$，又点 P 在 E 上，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$ ①. 由双曲线定义可知 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ ②，联立①②得 $|PF_1|=4a$，$|PF_2|=2a$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2=16a^2+4a^2-2\times4a\times2a\times\frac{3}{4}=4c^2$，即 $8a^2=4c^2$，所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

四、解答题

17. 解：(1) 若选①，因为 $\frac{S_{n+1}}{n+2}-\frac{S_n}{n+1}=1$，

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n+1}\right\}$ 为公差为 1，首项为 $\frac{a_1}{2}=1$ 的等差数列，（2 分）

所以 $\frac{S_n}{n+1}=1+(n-1)\times1=n$，所以 $S_n=n^2+n$，（3 分）

所以当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-[(n-1)^2+n-1]=2n$，当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 也符合，

所以 $a_n=2n$.（5 分）

若选②，由 $2S_n=(n+1)a_n$，得 $2S_{n-1}=na_{n-1}(n\geqslant2)$，

两式相减得 $2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$，

所以 $(n-1)a_n=na_{n-1}$，（3 分）

所以 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}(n\geqslant2)$，

所以$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$为常数列，所以$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=2$，

所以$a_n=2n$. （5分）

若选③，由$S_{n+1}+S_{n-1}=2+2S_n(n\geqslant2)$，

得$S_{n+1}-S_n-(S_n-S_{n-1})=2(n\geqslant2)$，

所以$a_{n+1}-a_n=2(n\geqslant2)$， （2分）

又$a_2-a_1=2$也满足上式， （3分）

所以$a_{n+1}-a_n=2(n\geqslant1)$， （4分）

所以$\{a_n\}$为公差为2，首项为2的等差数列，

所以$a_n=2n$. （5分）

(2)令$b_n=\frac{4}{a_na_{n+1}}$，由(1)知$b_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，（7分）

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. （10分）

18. 解：(1)由题得$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=1,\end{cases}$

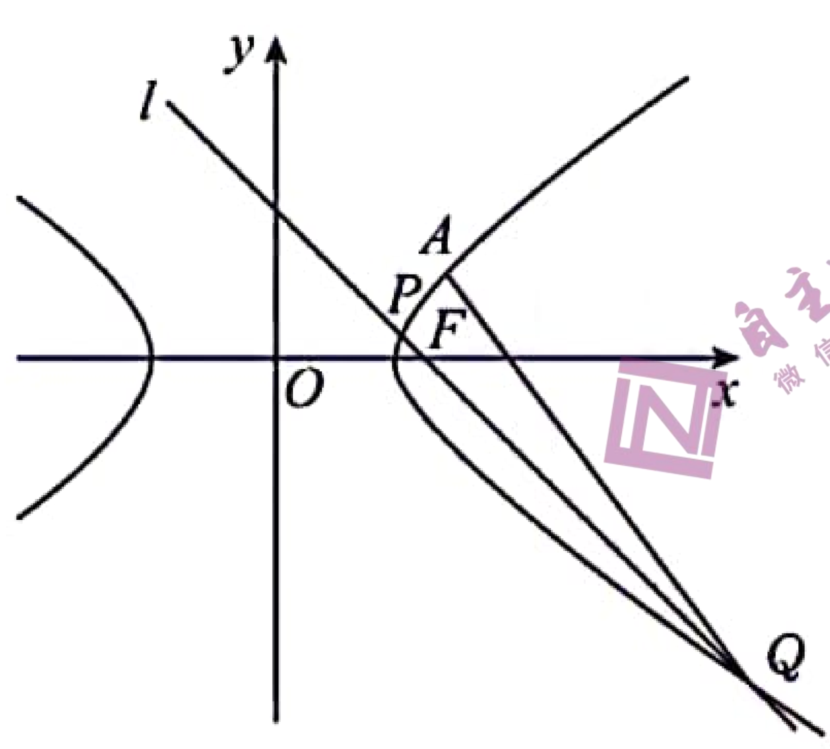
故C的方程为$\frac{x^2}{2}-y^2=1$. （4分）

(2)C的右焦点坐标为$(\sqrt{3},0)$，显然直线l的斜率不为0，如图，

设$l:x=my+\sqrt{3}$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

与$\frac{x^2}{2}-y^2=1$联立得$(m^2-2)y^2+2\sqrt{3}my+1=0$，

所以$m^2-2\neq0$，$\Delta=8m^2+8>0$，



$y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{3}m}{m^2-2}$，$y_1y_2=\frac{1}{m^2-2}$， （7分）

由$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=0$，得$2my_1y_2-(m+2-\sqrt{3})(y_1+y_2)+4-2\sqrt{3}=0$，

故$2m\cdot\frac{1}{m^2-2}-(m+2-\sqrt{3})\cdot\frac{-2\sqrt{3}m}{m^2-2}+4-2\sqrt{3}=0$，

即$(m+1)[m-(2-\sqrt{3})]=0$，

解得$m=-1$或$m=2-\sqrt{3}$. （10分）

当$m=2-\sqrt{3}$时，直线l过点A，不合题意，故舍去，

所以直线l的方程为$x+y-\sqrt{3}=0$. （12分）

19. 解：(1)因为点$A(2,y_0)$在C上，所以$4=2py_0$ ①，

因为$|AF|=2$，所以$y_0+\frac{p}{2}=2$ ②，

由①②解得$\begin{cases}y_0=1,\\ p=2\end{cases}$（负值舍去），所以$p=2$. （4分）

(2)由(1)知C的方程为$x^2=4y$，

依题意直线l的斜率存在，设直线l的方程为$y=kx-2$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$M_1(-x_1,y_1)$，

由$\begin{cases}y=kx-2,\\ x^2=4y,\end{cases}$得$x^2-4kx+8=0$，

所以$\Delta=16k^2-32>0$，则$k^2>2$，

$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=8$， （7分）

所以$k_{M_1N}=\frac{y_1-y_2}{-(x_1+x_2)}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}}{-(x_1+x_2)}=-\frac{x_1-x_2}{4}$，

则直线M_1N的方程为$y-y_2=-\frac{x_1-x_2}{4}(x-x_2)$，

即$y-\frac{x_2^2}{4}=-\frac{x_1-x_2}{4}(x-x_2)$，

即$y=-\frac{x_1-x_2}{4}x+\frac{x_1x_2}{4}$，即$y=-\frac{x_1-x_2}{4}x+2$，（11分）

令$x=0$，可得$y=2$，

所以直线M_1N恒过定点$(0,2)$. （12分）

20. 解：(1)连接AC，BD交于点O，则O为AC，BD的中点，连接OP，

因为$PA=PC$，所以$OP\perp AC$，同理$OP\perp BD$，且$OP=\sqrt{PD^2-OD^2}=3$.

又四边形$ABCD$是正方形，所以$OB\perp OC$， （1分）

故以O为原点，OB，OC，OP所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则$A(0,-3,0)$，$B(3,0,0)$，$C(0,3,0)$，$D(-3,0,0)$，$P(0,0,3)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(3,3,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,3,3)$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}=\frac{2}{3}(0,3,-3)-\frac{1}{3}(-3,0,-3)=(1,2,-1)$， （2分）

设平面PAB的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

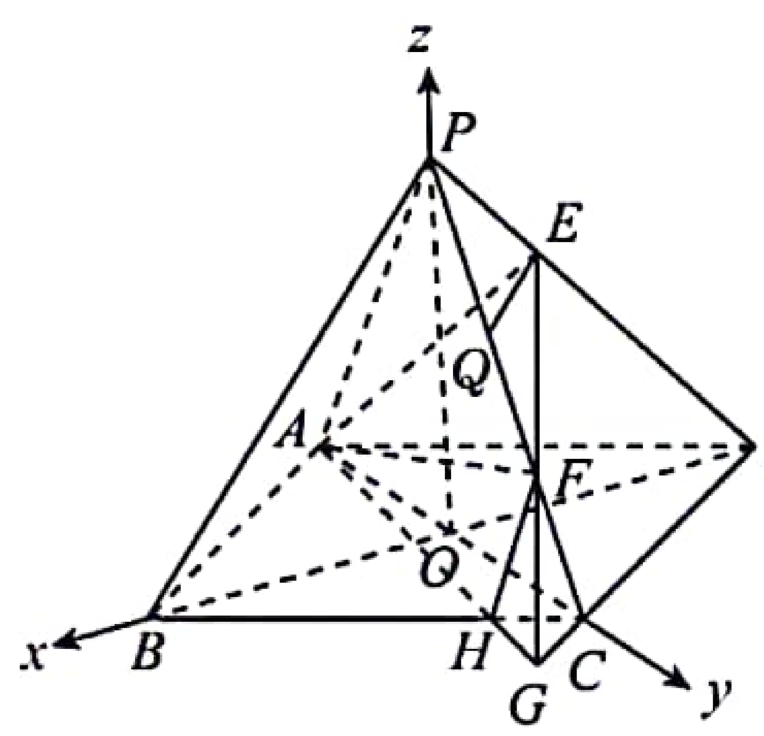
由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}3x+3y=0,\\ 3y+3z=0,\end{cases}$

取$y=-1$，则$x=z=1$，所以$\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$. （4分）

设直线EF与平面PAB所成的角为θ，

则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{EF}||\boldsymbol{m}|}=\frac{|1\times1+2\times(-1)-1\times1|}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

故直线EF与平面PAB所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$. （6分）



(2)如图，延长 EF 交 DC 的延长线于点 G，连接 AG 交 BC 于点 H，连接 FH，则四边形 $AEFH$ 为平面 AEF 截四棱锥 P-$ABCD$ 所得截面. （7 分）

取 PF 的中点 Q，又 $\overrightarrow{PD}=3\overrightarrow{PE}$，$\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{FC}$，

则 $\frac{PQ}{PC}=\frac{1}{3}=\frac{PE}{PD}$，

所以 $EQ\parallel CD$，所以 $CG=EQ=\frac{1}{3}CD=\sqrt{2}$.

又 $AB\parallel CD$，所以 $\frac{CH}{BH}=\frac{CG}{AB}=\frac{1}{3}$，即 $CH=\frac{1}{4}BC=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. （9 分）

又 $OP\perp$ 平面 $ABCD$，

所以点 E 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{2}{3}OP=2$，点 F 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{1}{3}OP=1$，

故截面与底面之间几何体的体积 $V=V_{三棱锥E\text{-}ADG}-V_{三棱锥F\text{-}CGH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{2}\times1=\frac{31}{4}$.

因为 $V_{四棱锥P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times(3\sqrt{2})^2\times3=18$，且 $18-\frac{31}{4}=\frac{41}{4}>\frac{31}{4}$，

所以所求较小几何体的体积为 $\frac{31}{4}$. （12 分）

21. **解：**(1)设 $M(x,y)$，则 $A(x,0)$，$D\left(x,-\frac{x}{2}\right)$，$B(0,y)$，$E(-2y,y)$，

所以 $\triangle AOD$ 的面积 $S_1=\frac{1}{2}|x|\left|-\frac{x}{2}\right|=\frac{x^2}{4}$，

$\triangle BOE$ 的面积 $S_2=\frac{1}{2}|y||-2y|=y^2$，

所以曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(xy\neq0)$. （4 分）

(2)当直线 OP，OQ 斜率都存在时，设直线 OP：$y=kx(k\neq0)$，则直线 OQ：$y=-\frac{1}{k}x$，

联立 $\begin{cases}y=kx,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x^2=\frac{4}{1+4k^2},\\ y^2=\frac{4k^2}{1+4k^2},\end{cases}$ （6 分）

所以 $|OP|=\sqrt{\frac{4}{1+4k^2}+\frac{4k^2}{1+4k^2}}=2\sqrt{\frac{1+k^2}{1+4k^2}}$，

（8 分）

用 $-\frac{1}{k}$ 代替 k，可得 $|OQ|=2\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2+4}}$， （9 分）

所以 $\triangle OPQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OP|\times|OQ|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{1+k^2}{1+4k^2}}\times2\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2+4}}=2\sqrt{\frac{k^4+2k^2+1}{4k^4+17k^2+4}}=\sqrt{1-\frac{9k^2}{4k^4+17k^2+4}}=\sqrt{1-\frac{9}{4k^2+\frac{4}{k^2}+17}}\geqslant\sqrt{1-\frac{9}{2\sqrt{4k^2\times\frac{4}{k^2}}+17}}=\frac{4}{5}$，

当且仅当 $k=\pm1$ 时，S 取得最小值.

当 P，Q 在 C 的顶点上时，此时 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

综上，$\triangle OPQ$ 的面积的最小值为 $\frac{4}{5}$. （12 分）

22. **解：**(1)由题知一盘游戏中仅出现一次音乐的概率

$f(p)=C_3^1p(1-p)^2=3p^3-6p^2+3p$， （2 分）

$f'(p)=3(3p-1)(p-1)$，

当 $p\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 时，$f'(p)>0$；当 $p\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right)$ 时，$f'(p)<0$，

所以 $f(p)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right)$ 上单调递减，

所以当 $p=\frac{1}{3}$ 时，$f(p)$ 有最大值，即 $f(p)$ 的最大值点 $p_0=\frac{1}{3}$. （5 分）

(2)由题可设每盘游戏的得分为随机变量 ξ，

则 $\xi=-300,50,100,150$，

$p(\xi=-300)=(1-p)^3$，

$p(\xi=50)=C_3^1p(1-p)^2$，

$p(\xi=100)=C_3^2p^2(1-p)$，

$p(\xi=150)=p^3$， （8 分）

所以 $E(\xi)=-300(1-p)^3+50C_3^1p(1-p)^2+100C_3^2p^2(1-p)+150p^3=300\left(p^3-3p^2+\frac{7}{2}p-1\right)$，

（9 分）

令 $g(p)=p^3-3p^2+\frac{7}{2}p-1$，

则 $g'(p)=3p^2-6p+\frac{7}{2}=3(p-1)^2+\frac{1}{2}>0$，

所以 $g(p)$ 在区间 $\left(0,\frac{2}{5}\right)$ 上单调递增，

所以 $g(p)<g\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{2}{125}<0$，故 $E(\xi)<0$，

这说明每盘游戏平均得分是负分，由概率统计的相关知识可知许多人经过若干盘游戏后，与最初的分数相比，分数没有增加反而会减少. （12 分）