

机密★启用前

# 湖北省部分市州 2024 年元月高三期末联考 数学试卷

本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交.

一、单选题:每小题 5 分,共 40 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项是符合要求的.

1. 已知  $i$  为虚数单位,则  $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) =$   
A.  $-i$                       B.  $i$                       C.  $-1$                       D.  $1$
2. 定义全集  $\mathbf{R}, A = \{x | x \geq 1\}, B = \{y | y = e^x, x \in A\}$ , 则  $\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B) =$   
A.  $(-\infty, 1)$               B.  $(-\infty, e)$               C.  $(0, 1)$                       D.  $(0, e)$
3. 设命题  $p$ : 数列  $\{a_n\}$  是等比数列, 命题  $q$ : 数列  $\{a_{2k-1}\}$  和  $\{a_{2k}\} (k \in \mathbf{N}^*)$  均为等比数列, 则  $p$  是  $q$  的  
A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                                  D. 既不充分也不必要条件
4. 已知任何大于 1 的整数总可以分解成素因数乘积的形式, 且如果不计分解式中素因数的次序, 这种分解式是唯一的. 如  $12 = 2^2 \times 3$ , 则 2000 的不同正因数个数为  
A. 25                                  B. 20                                  C. 15                                  D. 12
5. 某校高一年级有 1200 人, 现有两种课外实践活动供学生选择, 要求每个同学至少选择一种参加. 统计调查得知, 选择其中一项活动的人数占总数的 60% 到 65%, 选择另一项活动的人数占 50% 到 55%, 则下列说法正确的是  
A. 同时选择两项参加的人数可能有 100 人    B. 同时选择两项参加的人数可能有 180 人  
C. 同时选择两项参加的人数可能有 260 人    D. 同时选择两项参加的人数可能有 320 人
6. 圆锥  $SO$  中,  $S$  为圆锥顶点,  $O$  为底面圆的圆心, 底面圆  $O$  半径为 3, 侧面展开图面积为  $6\sqrt{3}\pi$ , 底面圆周上有两动点  $A, B$ , 则  $\triangle SAB$  面积的最大值为  
A. 4                                  B.  $2\sqrt{5}$                                   C.  $3\sqrt{3}$                                   D. 6

高三数学试卷 第 1 页(共 4 页)

7. 抛物线  $C$  的方程为  $x^2 = 4y$ , 过点  $P(0, 2)$  的直线交  $C$  于  $A, B$  两点, 记直线  $OA, OB$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 则  $k_1 k_2$  的值为

- A.  $-2$                       B.  $-1$                       C.  $-\frac{1}{2}$                       D.  $-\frac{1}{4}$

8. 已知函数  $f(x) = |\sin x|^3 + |\cos x|^3$ , 则下列关于  $f(x)$  说法正确的是

- A.  $f(x)$  的一个周期为  $\frac{\pi}{4}$                       B.  $f(x)$  在区间  $(-\frac{\pi}{4}, 0)$  上单调递减  
C.  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$  中心对称                      D.  $f(x)$  的最小值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、多选题: 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有错选得 0 分.

9. 新能源汽车相比较传统汽车具有节能环保、乘坐舒适、操控性好、使用成本低等优势, 近几年在我国得到越来越多消费者的青睐. 某品牌新能源汽车 2023 年上半年的销量如下表:

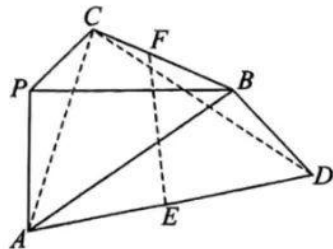
月份	1	2	3	4	5	6
销量(万辆)	11.7	12.4	13.8	13.2	14.6	15.3

针对上表数据, 下列说法正确的有

- A. 销量的极差为 3.6  
B. 销量的 60% 分位数是 13.2  
C. 销量的平均数与中位数相等  
D. 若销量关于月份的回归方程为  $y = 0.7x + b$ , 则  $b = 11.05$
10. 已知圆  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  与  $y$  轴交于  $O$  (原点),  $C$  两点, 点  $A$  是圆上的动点,  $B(2, 0)$ , 则  
A.  $|\overrightarrow{AB}|$  的最大值为  $\sqrt{5} + 1$     B.  $\forall x \in \mathbf{R}, |\overrightarrow{OB} - x\overrightarrow{BC}|$  的最小值为 1  
C.  $-2 \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 2$                       D. 令  $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB} + \mu \overrightarrow{OC}$ , 则存在两个不同的点  $A$ , 使  $\lambda + \mu = 1$
11. 设  $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ , 点  $A$  是直线  $3x + y - a - 1 = 0$  上的任意一点, 过点  $A$  作函数  $f(x)$  图象的切线, 可能作  
A. 0 条                      B. 1 条                      C. 2 条                      D. 3 条

12. 如图, 某工艺品是一个多面体  $PABCD$ ,  $AC = BD = 4\sqrt{2}\text{cm}$ ,  $AB = BC = CD = DA = 2\sqrt{13}\text{cm}$ , 点  $E \in AD, F \in BC, PA, PB, PC$  两两互相垂直, 且  $P, D$  位于平面  $ABC$  的异侧, 则下列命题正确的有

- A. 异面直线  $AD$  与  $BC$  所成角的余弦值为  $\frac{9}{13}$   
B. 当点  $E$  为  $AD$  的中点时, 线段  $EF$  的最小值为  $4\text{cm}$   
C. 工艺品  $PABCD$  的体积为  $48\text{cm}^3$   
D. 工艺品  $PABCD$  可以完全内置于表面积为  $64\pi\text{cm}^2$  的球内



三、填空题:每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知函数  $f(x) = x \cdot \lg(\sqrt{x^2+1} - ax)$  是偶函数, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 若角  $\alpha$  的顶点在原点, 始边与  $x$  轴的非负半轴重合, 终边与单位圆交于点  $P(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ , 则

$$\tan(\alpha + \frac{2023\pi}{4}) = \text{_____}.$$

15. 已知方程  $e^{ax-1} + (a-1)x - 1 - \ln x = 0$  有唯一实根, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

16. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右顶点分别为  $A, B, Q$  为椭圆上异于  $A, B$  的任意一点.

过右焦点作  $x$  轴的垂线与椭圆在第一象限交于点  $P$ , 连接  $AP$  并延长交直线  $x = \frac{a^2}{c}$  于点  $C$ ,

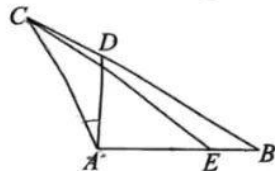
若  $\vec{AP} = \lambda \vec{PC} (1 \leq \lambda \leq 2)$ , 且  $\tan \angle QAB \cdot \tan \angle QBA < \frac{2}{3}$ , 则椭圆离心率的取值范围是 \_\_\_\_\_.

四、解答题:共 70 分. 解答题需要在答题卡上写出必要的说明或推理过程.

17. (本小题满分 10 分)

如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC = 6$ , 点  $D$  是边  $BC$  上一点, 且  $AD \perp AB$ ,  $\cos \angle CAD = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\vec{AE} = 2\vec{EB}$ .

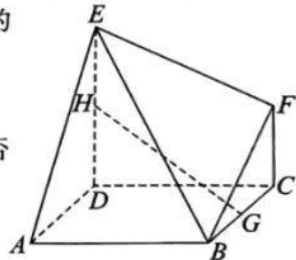
- (1) 求  $\triangle BCE$  的面积;
- (2) 求线段  $AD$  的长.



18. (本小题满分 12 分)

如图, 在多面体  $ABCDEF$  中, 底面  $ABCD$  为菱形,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $DE \perp$  平面  $ABCD$ ,  $CF \parallel DE$ , 且  $AB = DE = 2, CF = 1, G$  为棱  $BC$  的中点,  $H$  为棱  $DE$  上的动点.

- (1) 求二面角  $A-BE-F$  的正弦值;
- (2) 是否存在点  $H$  使得  $GH \parallel$  平面  $BEF$ ? 若存在, 求  $\frac{EH}{ED}$  的值; 否则, 请说明理由.



19. (本小题满分 12 分)

第 19 届亚运会于 2023 年 9 月 23 日至 2023 年 10 月 8 日在杭州举行. 这是中国为世界呈现的体育盛会, 也是亚洲人民携手写就的崭新篇章. 现有某场乒乓球比赛采用 5 局 3 胜制, 先赢 3 局的一方获胜, 比赛结束. 若参加比赛的甲每局比赛战胜对手乙的概率均为  $\frac{2}{3}$ . 假设各局比赛结果相互独立.

- (1) 求比赛恰好进行 4 局甲获胜的概率;
- (2) 设比赛进行的总局数为  $X$ , 求  $X$  的分布列和数学期望;
- (3) 如果某场比赛赛前有 3 局 2 胜制和 5 局 3 胜制两种方案供选手选择, 从概率角度考虑, 乙如何选择对自己有利? 请直接写出选择方案.

20. (本小题满分 12 分)

已知正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $2S_n = a_n + \frac{1}{a_n}$

(1) 证明: 数列  $\{S_n^2\}$  是等差数列;

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $\frac{b_n}{b_{n+1} - b_n} = S_n^2 - \frac{1}{2}$ , 且  $b_1 = 1$ , 求数列  $\left|(-1)^n \frac{4S_n^2}{b_n b_{n+1}}\right|$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

21. (本小题满分 12 分)

已知  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,

(1) 证明:  $\frac{\tan x - x}{x - \sin x} > 2$ ;

(2) 若  $\tan x + 2\sin x - ax > 0$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知双曲线  $C$  与双曲线  $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$  有相同的渐近线, 且双曲线  $C$  的上焦点到一条渐近线的距离等于 2.

(1) 已知  $M(0, t)$  ( $t > 4$ ),  $N$  为  $C$  上任意一点, 求  $|MN|$  的最小值;

(2) 已知动直线  $l: y = kx + m$  ( $k \neq \pm 2$ ) 与曲线  $C$  有且仅有一个交点  $P$ , 过点  $P$  且与  $l$  垂直的直线  $l_1$  与两坐标轴分别交于  $A(x_0, 0), B(0, y_0)$ . 设点  $Q(x_0, y_0)$ .

(i) 求点  $Q$  的轨迹方程;

(ii) 若对于一般情形, 曲线  $C$  方程为  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ , 动直线  $l$  方程为  $y = kx + m$  ( $k \neq \pm \frac{a}{b}$ ),

请直接写出点  $Q(x_0, y_0)$  的轨迹方程.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线