吉林省普通高中 G6 教考联盟 2023-2024 学年上学期期末考试

高二年级数学

本试卷共 5 页.考试结束后，将答题卡交回.

注意事项：1．答卷前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区.

2．答题时请按要求用笔.

3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效.

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.

5．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 数列 -1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\cdots$ 的一个通项公式为 $a_n=$（　　）

A. $\frac{(-1)^n}{n}$　　B. $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$　　C. $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$　　D. $\frac{(-1)^n}{n+1}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用观察法即可得解.

【详解】观察数列 -1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\cdots$

可知其分母为 n，其分子是 $-1,1$ 交替出现，故分子可为 $\left(-1\right)^n$，

所以该数列的一个通项公式为 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

故选：A.

2. 直线 l 的一个方向向量为 $(-2,1,-1)$，平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}=(3,3,-3)$，则（　　）

A. $l//\alpha$　　B. $l\perp\alpha$

C. $l//\alpha$ 或 $l\subset\alpha$　　　　D. l 与 α 的位置关系不能判断

【答案】C

【解析】

【分析】由直线的方向向量和平面的法向量的位置关系与直线和平面的位置关系即可得解.

【详解】由题意直线 l 的一个方向向量与平面 α 的一个法向量的数量积为

$-2\times3+1\times3+\left(-1\right)\times\left(-3\right)=0$，

所以 $l//\alpha$ 或 $l\subset\alpha$.

故选：C.

3. 已知圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 过点 $P(1,3)$ 作圆的切线，则该切线的一般式方程为（　　）

A. $x+2y-7=0$　　　　B. $x-2y+5=0$

C. $2x+y-5=0$　　　　D. $2x-y+1=0$

【答案】B

【解析】

【分析】由题意点 $P(1,3)$ 在圆上面，故由直线 CP 的斜率可得切线的斜率，进而由点斜式化为一般式子即可得解.

【详解】因为圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 的圆心坐标为 $C\left(2,1\right)$，且点 $P(1,3)$ 的坐标满足

$(1-2)^2+(3-1)^2=5$，

这表了点 $P(1,3)$ 在圆上面，所以直线 CP 的斜率为 $k_{CP}=\dfrac{1-3}{2-1}=-2$，过点 $P(1,3)$ 的切线的斜率为 $-\dfrac{1}{k_{CP}}=\dfrac{1}{2}$，

所以该切线方程为 $y-3=\dfrac{1}{2}\left(x-1\right)$，化为一般式得 $x-2y+5=0$.

故选：B.

4. 如图是某景区内的一座抛物线拱形大桥，该桥抛物线拱形部分的桥面跨度为 10 米，拱形最高点与水面的距离为 6 米，为增加景区的夜晚景色，景区计划在拱形桥的焦点处悬挂一闪光灯，则竖直悬挂的闪光灯到水面的距离为（　　）（结果精确到 0.01）

A. 4.96　　B. 5.06　　C. 4.26　　D. 3.68

【答案】A

【解析】

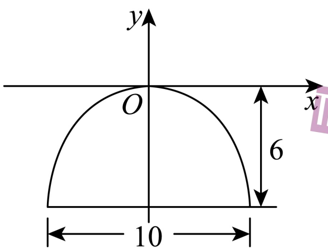
【分析】建立平面直角坐标系，设抛物线的方程，根据题意知抛物线经过点$(5,-6)$，把点$(5,-6)$代入抛物线方程即可求出p，根据竖直悬挂的闪光灯距离水面的距离为$6-\frac{p}{2}$，即可求出答案.

【详解】如图，设抛物线的方程为$x^2=-2py$，抛物线经过点$(5,-6)$，

所以$25=12p$，解得$p=\frac{25}{12}$，所以抛物线顶点到焦点的距离为$\frac{p}{2}=\frac{25}{24}$，

故竖直悬挂的闪光灯距离水面的距离为$6-\frac{p}{2}=6-\frac{25}{24}\approx 4.96$米.

故选：A.



5. 函数$f(x)=\ln x+2x^2$在点$(1,2)$处的切线方程为（　　）

A. $y=3x-1$　　B. $y=5x-3$

C. $y=-3x+5$　　D. $y=-5x+7$

【答案】B

【解析】

【分析】先对函数求导，利用导数的几何意义求出切线的斜率，再根据条件即可求出结果.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\ln x+2x^2$，所以 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+4x$，故 $f'\left(1\right)=\dfrac{1}{1}+4=5$，

由导数的几何意义知，函数 $f\left(x\right)=\ln x+2x^2$ 在点 $\left(1,2\right)$ 处的切线方程为 $y-2=5(x-1)$，

即 $y=5x-3$.

故选：B.

6. 设直线 l 的方程为 $x+y\cos\theta+3=0\left(\theta\in\mathrm{R}\right)$，则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是（　　）

A. $\left[0,\pi\right)$　　B. $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$　　C. $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$　　D. $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

【答案】C

【解析】

【分析】当 $\cos\theta=0$ 时，可得倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$，当 $\cos\theta\neq 0$ 时，由直线方程可得斜率 $k=-\dfrac{1}{\cos\theta}=\tan\alpha$，然后由余弦函数和正切函数的性质求解即可.

【详解】当 $\cos\theta=0$ 时，方程变为 $x+3=0$，其倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$，

当 $\cos\theta\neq 0$ 时，由直线方程可得斜率 $k=-\dfrac{1}{\cos\theta}$，$\because\cos\theta\in\left[-1,1\right]$ 且 $\cos\theta\neq 0$，

$\therefore k\in\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$，即 $\tan\alpha\in\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$，又 $\alpha\in\left[0,\pi\right)$，

$\therefore\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，

综上所述，倾斜角的范围是 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

故选：C.

7. 已知公差 $d\neq 0$ 的等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 前 n 项和为 S_n，满足 $S_{2000}=S_{2024}$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $S_{2012}=0$　　B. $S_{4024}=0$

C. S_{2012} 是 S_n 中的最大值　　D. S_{2012} 是 S_n 中的最小值

【答案】B

【解析】

【分析】由题意 $S_{2024}-S_{2000}=12\left(a_{2012}+a_{2013}\right)=0$，由下标和性质以及等差数列求和公式得 B 正确；对公差与 0 的大小关系讨论可得 ACD 错误.

【详解】由题意 $S_{2024}-S_{2000}=a_{2001}+a_{2002}+\cdots+a_{2024}=12\left(a_{2012}+a_{2013}\right)=0$，即

$a_{2012}=-a_{2013}$，

所以 $S_{4024}=\dfrac{4024\left(a_1+a_{4024}\right)}{2}=2012\left(a_{2012}+a_{2013}\right)=0$，故 B 正确；

当 $d>0$ 时，可得 $a_1<a_2<\cdots<a_{2011}<a_{2012}=-a_{2013}<0,a_{2013}>0$，此时 $S_{2012}<0$，S_{2012} 是 S_n 中的最小值，

当 $d<0$ 时，可得 $a_1>a_2>\cdots>a_{2011}>a_{2012}=-a_{2013}>0,a_{2013}<0$，此时 $S_{2012}>0$，S_{2012} 是 S_n 中的最大值，故 ACD 错误.

故选：B.

8. 已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，$M$ 和 N 分别为实轴的右端点和虚轴的上端点，过右焦点 F 的直线 l 交 C 的右支于 A，B 两点.若存在直线 l 使得点 M 为 $\triangle NAB$ 的重心，则 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{4}{3}$　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. 2　　　　D. $\sqrt{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角形重心公式得到线段 AB 中点 $P\left(\dfrac{3a}{2},-\dfrac{b}{2}\right)$，根据 $k_{BA}=k_{FP}$ 建立等式计算即可得到.

【详解】依题意，$M\left(a,0\right)$，$N\left(0,b\right)$，$F\left(c,0\right)$，

设 $B\left(x_1,y_1\right)$，$A\left(x_2,y_2\right)$，则 AB 的中点 $P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，

因为点 M 为 $\triangle NAB$ 的重心，则 $a=\dfrac{x_1+x_2}{3}$，$\dfrac{b+y_1+y_2}{3}=0$，

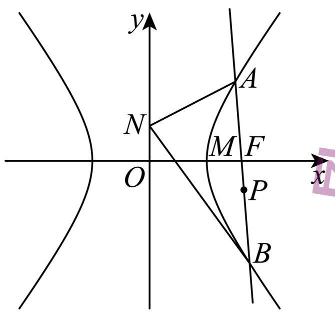
所以 AB 中点 $P\left(\frac{3a}{2},-\frac{b}{2}\right)$，

因为 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$，

两式作差得：$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}$，化简得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{b^2}{a^2}$，即 $k_{BA}\cdot k_{OP}=\frac{b^2}{a^2}$，

因为 $k_{OP}=-\frac{b}{3a}$，又因为 B，A，F，P 四点共线，所以 $k_{BA}=k_{FP}=\frac{\frac{b}{2}}{c-\frac{3a}{2}}$.

故 $\frac{\frac{b}{2}}{c-\frac{3a}{2}}\cdot\frac{-b}{3a}=\frac{b^2}{a^2}$，解得 $3c=4a$，故 $e=\frac{4}{3}$.



故选：A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，且 a_2,a_4,a_3 成等差数列，则 $q=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. 1

【答案】AD

【解析】

【分析】根据等比数列的通项公式结合等差中项列方程求解.

【详解】由题意，$a_2+a_3=2a_4$，由等比数列通项公式可得 $a_2(1+q)=2a_2q^2$，

由于等比数列每一项都不是 0，故 $2q^2-1-q=0$，

即 $(2q+1)(q-1)=0$，解得 $q=-\frac{1}{2}$ 或 $q=1$.

故选：AD

10. 已知圆C：$(x+2)^2+y^2=4$，直线l：$(m+1)x+2y-1+m=0$（$m\in\mathbf{R}$），则（　　）

A. 直线l恒过定点$(-1,1)$

B. 当$m=0$时，圆C上恰有三个点到直线l的距离等于 1

C. 直线l与圆C有两个交点

D. 圆C与圆$x^2+y^2-2x+8y+8=0$恰有三条公切线

【答案】ACD

【解析】

【分析】A，将直线变形，即可得到直线过的定点；B，结合点到直线的距离公式，可得到结果；C，由定点在圆内，即可判断；D，利用圆心距与两圆半径之间的关系即可判断.

【详解】对于 A，直线 $l:\left(m+1\right)x+2y-1+m=0\left(m\in\mathbf{R}\right)$，所以$m(x+1)+x+2y-1=0$，

令$\begin{cases}x+1=0\\x+2y-1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，所以直线恒过定点$(-1,1)$，故 A 正确；

对于 B，当$m=0$时，直线l为：$x+2y-1=0$，

则圆心$C(-2,0)$到直线l的距离为$d=\dfrac{\left|-2+0-1\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，$2-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}<1$，

所以圆上只有 2 个点到直线的距离为1，故 B 错误；

对于 C，因为直线过定点$(-1,1)$，所以$(-1+2)^2+1^2<4$，

所以定点在圆内，则直线与圆有两个交点，故 C 正确；

对于 D，由圆的方程$x^2+y^2-2x+8y+8=0$可得，$(x-1)^2+(y+4)^2=9$，

所以圆心为$(1,-4)$，半径为3，

此时两圆圆心距为$\sqrt{\left(1+2\right)^2+\left(-4-0\right)^2}=5=2+3$，

所以两圆的位置关系为外切，则两圆恰有三条公切线，故 D 正确.

故选：ACD.

11. 已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1-2a_n}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，数列$\left\{b_n\right\}$满足$b_n=a_na_{n+1}$. 记数列$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和为$S_n$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a_3=-3$

B. 数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列

C. $S_n<-\dfrac{1}{2}$

D. $S_n\geq-\dfrac{1}{2}$

【答案】BC

【解析】

【分析】由 B 选项提示，用等差数列验证 B 正确，进一步可得数列$\{a_n\}$的通项公式验证 A 错误，由数列$\{b_n\}$定义，可用裂项相消法求它的前n项和S_n，进而验证 CD.

【详解】由题意得$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1-2a_n}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}-2$，即$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=-2,\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以$\dfrac{1}{a_1}=1$为首项，$d=-2$为公差的等差数列，故 B 正确；

由以上可知$\dfrac{1}{a_n}=1-2(n-1)=3-2n$，所以$a_n=\dfrac{1}{3-2n}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，从而$a_3=-\dfrac{1}{3}$，故 A 错误；

而$b_n=a_na_{n+1}=\dfrac{1}{3-2n}\cdot\dfrac{1}{1-2n}=\dfrac{1}{(2n-3)(2n-1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}\right),\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，

所以$S_n=\dfrac{1}{2}\left(-1-1+1-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-1-\dfrac{1}{2n-1}\right)<-\dfrac{1}{2},\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，故 C 对 D 错.

故选：BC.

12. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1，F_2，点$P(x_0,y_0)$是椭圆C上异于左、右顶点的一点，则下列说法正确的是（　　）

A. $\triangle PF_1F_2$的周长为$2\sqrt{5}+4$

B. $\triangle PF_1F_2$的面积的最大值为 2

C. 若$A(1,0)$，则$|PA|$的最小值为$\sqrt{5}-1$

D. $\dfrac{y_0}{x_0+4}$的最小值为$-\dfrac{\sqrt{11}}{11}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】选项 A，由定义可得；选项 B，$F_1F_2=4$，数形结合当点 P 到 F_1F_2 的距离最大，即高最大时面积最大；选项 C，设点表达 $|PA|$，利用椭圆方程消元求函数最值即可；选项 D，利用 $\dfrac{y_0}{x_0+4}$ 的斜率意义，转化为直线与椭圆有公共点求斜率范围，从而求得最小值.

【详解】选项 A，由椭圆方程 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 可知，$a=\sqrt{5},b=1,c=2$，

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的周长 $l=|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=2\sqrt{5}+4$，故 A 正确；

选项 B，因为点 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 C 上异于左、右顶点的一点，

所以 $0<|y_0|\le 1$，

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2||y_0|=2|y_0|\le 2$，

当 $|y_0|=1$，即 $y_0=\pm 1$ 时，

即点 P 位于短轴端点时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，最大为 2，故 B 正确；

选项 C，由 $A(1,0)$，点 $P(x_0,y_0)$，且 $\dfrac{x_0^2}{5}+y_0^2=1$，

因为 $|PA|=\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-1)^2+1-\dfrac{x_0^2}{5}}=\sqrt{\dfrac{4}{5}\left(x_0-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$，

当 $x_0=\dfrac{5}{4}$ 时，$|PA|$ 取最小值，且最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 C 错误；

选项 D，$\dfrac{y_0}{x_0+4}$ 的几何意义为 $P(x_0,y_0)$ 与点 $M(-4,0)$ 两点连线的斜率，设为 k，

由 $\begin{cases} y=k(x+4), \\ \dfrac{x^2}{5}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $\left(1+5k^2\right)x^2+40k^2x+80k^2-5=0$，

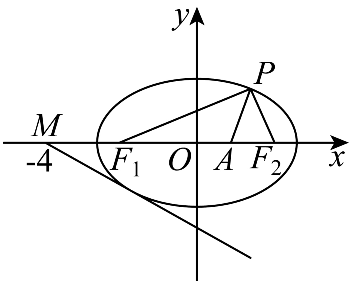
$\Delta=\left(40k^2\right)^2-4\left(5k^2+1\right)\left(80k^2-5\right)=20(1-11k^2)\ge 0$，

解得 $-\dfrac{\sqrt{11}}{11}\le k\le\dfrac{\sqrt{11}}{11}$，

如图，当直线 $y=k(x+4)$ 与椭圆 C 相切时，$k_{\min}=-\dfrac{\sqrt{11}}{11}$，

所以 $\dfrac{y_0}{x_0+4}$ 的最小值为 $-\dfrac{\sqrt{11}}{11}$.故 D 正确.

故选：ABD.



三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若直线 $x+y+1=0$ 是圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的一条对称轴，则 $a=$________.

【答案】-1

【解析】

【分析】将问题转化为直线过圆心，从而得解.

【详解】圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的圆心坐标为 $(a,0)$，

因为直线 $x+y+1=0$ 是圆 $(x+a)^2+y^2=1$ 的一条对称轴，所以圆心 $(a,0)$ 在此直线上，

所以 $a+0+1=0$，解得 $a=-1$.

故答案为：-1.

14. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$，则 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=$_______.

【答案】$\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$

【解析】

【分析】直接利用导数运算法则求导即可.

【详解】因为 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$

$$f'(x)=(\mathrm{e}^x)'\cos x+\mathrm{e}^x(\cos x)'=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x).$$

故答案为：$\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$.

15. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $A(2，1)$，M 为抛物线上一点，且 M 不在直线 AF 上，则

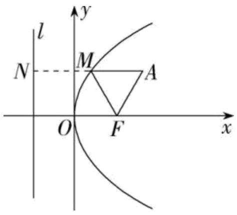
$\triangle MAF$ 周长的最小值为____.

【答案】$3+\sqrt{2}$

【解析】

【分析】过 M 作 MN 垂直于抛物线的准线 l，由抛物线的定义得到 $|MF|+|AM|=|AM|+|MN|$，然后由 A、M、N 三点共线时求解.

【详解】如图所示，



过 M 作 MN 垂直于抛物线的准线 l，垂足为 N．易知 $F(1，0)$，

因为$\triangle MAF$ 的周长为$|AF|+|MF|+|AM|$，

$|AF|=\sqrt{(2-1)^2+1}=\sqrt{2}$，$|MF|+|AM|=|AM|+|MN|$，

所以当 A、M、N 三点共线时，$\triangle MAF$ 的周长最小，

最小值为 $2+1+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$．

故答案为：$3+\sqrt{2}$

16. 定义：各项均不为零的数列$\{a_n\}$中，所有满足$a_i\cdot a_{i+1}<0$的正整数i的个数称为这个数列$\{a_n\}$的变号数.已知数列$\{b_n\}$的前n项和$S_n=n^2-6n+a$（$n\in\mathbf{N}^*$，$a\neq 5$），令$a_n=1-\dfrac{4}{b_n}$（$n\in\mathbf{N}^*$），若数列$\{a_n\}$的变号数为2，则实数a的取值范围是__________.

【答案】$(-\infty,5)\cup(9,+\infty)$

【解析】

【分析】根据$b_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$，求出$\{b_n\}$的通项公式，即可得到$\{a_n\}$的通项公式，再列出前几项，得到$a_1>0$，即可求出参数的取值范围.

【详解】解：依题意当$n=1$时，$b_1=S_1=a-5$，

$\therefore a_1=1-\dfrac{4}{b_1}=1-\dfrac{4}{a-5}$，

当 $n\geq 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-6n+a-\left[(n-1)^2-6(n-1)+a\right]=2n-7$

$\therefore a_n=1-\frac{4}{b_n}=1-\frac{4}{2n-7}=\frac{2n-11}{2n-7}$，$(n\geq 2)$

$\therefore a_2=\frac{7}{3}$，$a_3=5$，$a_4=-3$，$a_5=-\frac{1}{3}$，$a_6=\frac{1}{5}$，且 $n\geq 6$ 时，$a_n>0$，

$\therefore a_3\cdot a_4<0$，$a_5\cdot a_6<0$

要使数列 $\{a_n\}$ 的变号数为 2，则 $a_1=1-\frac{4}{a-5}>0$，解得 $a>9$ 或 $a<5$，即

$a\in(-\infty,5)\cup(9,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,5)\cup(9,+\infty)$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知动点 P 与两个定点 $A(1,0)$，$B(4,0)$ 的距离的比是 2.

（1）求动点 P 的轨迹 C 的方程；

（2）直线 l 过点 $(2,1)$，且被曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l 的方程.

【答案】（1）$(x-5)^2+y^2=4$

（2）$y=1$ 或 $3x+4y-10=0$

【解析】

【分析】（1）直接利用条件求出点 P 的轨迹方程，所求方程表示一个圆；

（2）直线 l 的斜率分存在与不存在两种情况，当直线的斜率不存在时，检验不满足条件；当直线的斜率存在时，用点斜式设出直线的方程，根据弦长和点到直线的距离公式列出等式即可求出直线的斜率，进而求出直线的方程.

【小问 1 详解】

设点 $P(x,y)$，

$\because$ 动点 P 与两个定点 $A(1,0)$，$B(4,0)$ 的距离的比是 2，

$\therefore \frac{|PA|}{|PB|}=2$，即 $|PA|=2|PB|$，

则 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，

化简得 $x^2+y^2-10x+21=0$，

所以动点 P 的轨迹 C 的方程为 $(x-5)^2+y^2=4$；

【小问 2 详解】

由（1）可知点 P 的轨迹 C 是以 $(5,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，

$\because$ 直线被曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，

$\therefore$ 圆心 $(5,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{4-3}=1$，

①当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=2$，此时圆心到直线 l 的距离是 3，不符合条件；

②当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $kx-y-2k+1=0$，

所以圆心 $(5,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

化简得 $9k^2+6k+1=k^2+1$，解得 $k=0$ 或 $k=-\dfrac{3}{4}$，

此时直线 l 的方程为 $y=1$ 或 $3x+4y-10=0$.

综上，直线 l 的方程是 $y=1$ 或 $3x+4y-10=0$.

18. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2a_n-1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\begin{cases}\log_2 a_n, n\text{为奇数}\\ a_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

【答案】（1）$a_n=2^{n-1}$

（2）$T_{2n}=\dfrac{1}{3}\times 2^{2n+1}+n^2-n-\dfrac{2}{3}$

【解析】

【分析】（1）根据 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1\\ S_n-S_{n-1}, n\geq 2\end{cases}$ 求得 a_n.

（2）根据分组求和法求得正确答案.

【小问 1 详解】

依题意，$S_n=2a_n-1$，

当 $n=1$ 时，$a_1=2a_1-1, a_1=1$，

当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}, a_n=2a_{n-1}\left(n\ge 2\right)$，

所以数列 $\left\{a_n\right\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_n=2^{n-1}$，a_1 也符合.

所以 $a_n=2^{n-1}$.

【小问 2 详解】

由（1）得 $b_n=\begin{cases} n-1, n\text{为奇数} \\ 2^{n-1}, n\text{为偶数} \end{cases}$，所以

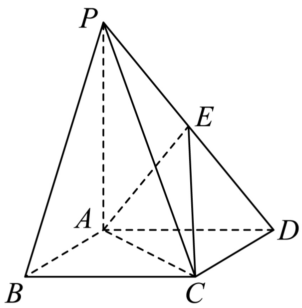
$T_{2n}=\left(0+2+4+\cdots+2n-2\right)+\left(2+2^3+\cdots+2^{2n-1}\right)$

$=\dfrac{0+2n-2}{2}\times n+\dfrac{2\left(1-4^n\right)}{1-4}$

$=\dfrac{2}{3}\times 4^n+n^2-n-\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\times 2^{2n+1}+n^2-n-\dfrac{2}{3}$.

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，点 E 是 PD 的中点，$AB=1$，$AD=PA=2$.



（1）求 PC 与 AE 所成角的大小；

（2）求 PC 与平面 ACE 所成角的正弦值.

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{2}$

（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

【解析】

【分析】（1）以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 所在的直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，求出 $\overrightarrow{PC}$、$\overrightarrow{AE}$，利用 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ 可得答案；

（2）求出平面 ACE 的一个法向量，利用线面角的向量求法可得答案.

【小问 1 详解】

$AB\perp AD$，又 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，AD、$AB\subset$ 底面 $ABCD$，$PA\perp AD$，$PA\perp AB$，

故以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 所在的直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{PC}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$，所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AE}=1\times0+2\times1-2\times1=0$，

所以 $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AE}$，即 PC 与 AE 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{2}$；

【小问 2 详解】

由（1）知 $\overrightarrow{PC}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$.

设平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=0\\ y+z=0\end{cases}$，

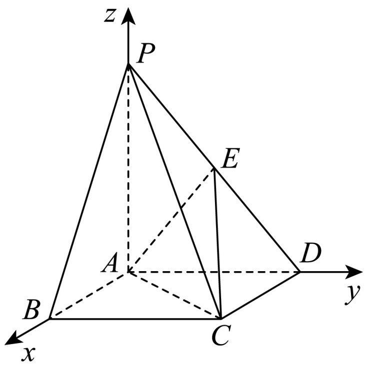
取 $y=1$，则 $x=-2$，$z=-1$，

所以 $\vec{n}=(-2,1,-1)$ 是平面 ACE 的一个法向量，

设 PC 与平面 ACE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{PC},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2}{3\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$，

所以 PC 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.



20. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的一条渐近线为$y=x$，且双曲线$C$的虚轴长为$2\sqrt{2}$.

（1）求双曲线C的方程；

（2）记O为坐标原点，过点$Q\left(0,2\right)$的直线l与双曲线C相交于不同的两点M、N，若$\triangle OMN$的面积为$2\sqrt{2}$，求直线l的方程.

【答案】（1）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

（2）$y=\sqrt{2}x+2$或$y=-\sqrt{2}x+2$

【解析】

【分析】（1）根据已知条件求出a、b的值，即可得出双曲线C的方程；

（2）分析可知，直线l的斜率存在，设直线l的方程为$y=kx+2$，设点$M\left(x_1,y_1\right)$、$N\left(x_2,y_2\right)$，将直线l的方程与双曲线C的方程联立，根据题意得出$\begin{cases}k^2-1\neq 0\\ \Delta=16k^2-24\left(k^2-1\right)>0\end{cases}$，求出$k$的取值范围，列出韦达定理，利用三角形的面积公式以及韦达定理求出k的值，即可得出直线l的方程.

【小问1详解】

解：由题意可得$\begin{cases}\frac{b}{a}=1\\ 2b=2\sqrt{2}\end{cases}$，可得$a=b=\sqrt{2}$，

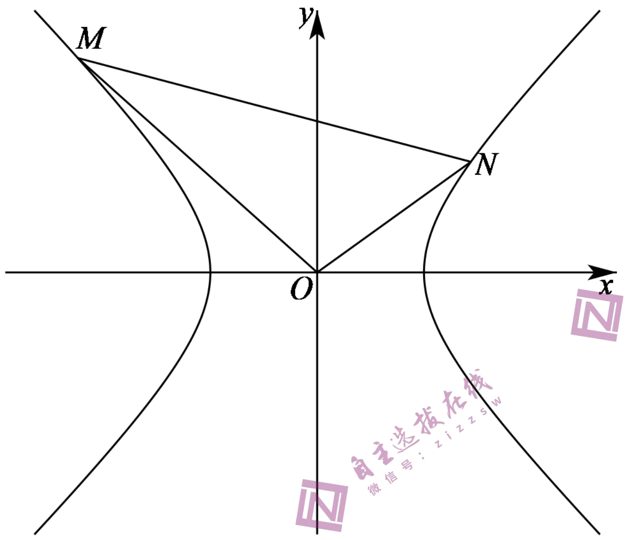
因此，双曲线C的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

【小问 2 详解】

解：若直线 l 与 y 轴重合，则直线 l 与双曲线 C 没有交点，不合乎题意，

所以，直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+2$，设点 $M\left(x_1,y_1\right)$、$N\left(x_2,y_2\right)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+2 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$ 可得 $\left(k^2-1\right)x^2+4kx+6=0$，



由题意可得 $\begin{cases} k^2-1\neq 0 \\ \Delta=16k^2-24\left(k^2-1\right)>0 \end{cases}$，解得 $k\in\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup\left(-1,1\right)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$，

由韦达定理可得 $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{k^2-1}$，$x_1x_2=\dfrac{6}{k^2-1}$，

则 $\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\dfrac{4k}{k^2-1}\right)^2-\dfrac{24}{k^2-1}}=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{\left|k^2-1\right|}$，

$S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}\times 2\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-k^2}}{\left|k^2-1\right|}=2\sqrt{2}$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$，合乎题意，

所以，直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}x+2$ 或 $y=-\sqrt{2}x+2$.

21. 我国某西部地区要进行沙漠治理，已知某年（第 1 年）年底该地区有土地 1 万平方千米，其中 70% 是沙漠. 从第 2 年起，该地区进行绿化改造，每年把原有沙漠的 16% 改造成绿洲，同时原有绿洲的 4% 被沙漠所侵蚀又变成沙漠. 设第 n 年绿洲面积为 a_n 万平方千米.

（1）求第 n 年绿洲面积 a_n（单位：万平方千米）与上一年绿洲面积 a_{n-1}（单位：万平方千米）之间的数量关系（$n\geq 2$）；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）至少经过$n(n\in\mathrm{N}^*)$年，绿洲面积可超过60%，求n的值.（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$）

【答案】（1）$a_n=\frac{4}{5}a_{n-1}+\frac{4}{25}(n\geq 2,n\in\mathrm{N}^*)$.

（2）$a_n=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\frac{4}{5}$

（3）6

【解析】

【分析】（1）由题意，列出第n年绿洲面积与上一年绿洲面积a_{n-1}的关系，即可得到答案；

（2）利用递推数列，构造新数列$\left\{a_{n-1}-\frac{4}{5}\right\}$是首项为$-\frac{1}{2}$，公比为$\frac{4}{5}$的等比数列，由等比数列的通项公式求解即可；

（3）由题意，列出不等关系，然后利用指数与对数的运算性质求解即可.

【小问 1 详解】

由题意得，$a_n=(1-4\%)a_{n-1}+(1-a_{n-1})\times 16\%=0.96a_{n-1}+0.16-0.16a_{n-1}$

$=0.8a_{n-1}+0.16=\frac{4}{5}a_{n-1}+\frac{4}{25}$,

$\therefore a_n=\frac{4}{5}a_{n-1}+\frac{4}{25}(n\geq 2,n\in\mathrm{N}^*)$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$a_n=\frac{4}{5}a_{n-1}+\frac{4}{25}(n\geq 2,n\in\mathrm{N}^*)$，可变形为：$a_n-\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\left(a_{n-1}-\frac{4}{5}\right)$,

又$a_1-\frac{4}{5}=1\times(1-70\%)-\frac{4}{5}=-\frac{1}{2}$,

所以数列$\left\{a_{n-1}-\frac{4}{5}\right\}$是以$-\frac{1}{2}$为首项，$\frac{4}{5}$为公比的等比数列，

所以$a_n-\frac{4}{5}=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$，故$a_n=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\frac{4}{5}$.

【小问 3 详解】

由（2）知，$a_n=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\frac{4}{5}$,

令 $a_n=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\frac{4}{5}>1\times 60\%$，即 $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}<\frac{2}{5}$，所以 $n-1>\log_{\frac{4}{5}}\frac{2}{5}$，

因为 $\log_{\frac{4}{5}}\frac{2}{5}=\frac{\lg 2-\lg 5}{2\lg 2-\lg 5}=\frac{\lg 2-(1-\lg 2)}{2\lg 2-(1-\lg 2)}=\frac{2\lg 2-1}{3\lg 2-1}\approx\frac{2\times 0.301-1}{3\times 0.301-1}=4.1$，

则 $n-1>4.1$，所以 $n>5.1$，

因为 $n\in\mathrm{N}^*$，所以至少经过 6 年，绿洲面积可超过 60% .

22. 已知 $B(-2,0)$，$C(2,0)$ 为 $\triangle ABC$ 的两个顶点，P 为 $\triangle ABC$ 的重心，边 AC，AB 上的两条中线长度之和为 $3\sqrt{6}$.

（1）求点 P 的轨迹 Γ 的方程；

（2）过 C 作不平行于坐标轴的直线交 Γ 于 D，E 两点，若 $DM\perp x$ 轴于点 M，$EN\perp x$ 轴于点 N，直线 DN 与 EM 交于点 Q．求证：点 Q 在一条定直线上，并求此定直线方程.

【答案】（1）$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\left(x\neq\pm\sqrt{6}\right)$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用三角形重心的性质，结合椭圆的定义即可得解；

（2）联立直线与椭圆方程得到 y_1+y_2，$y_1\cdot y_2$，再求出直线 DN 与 EM 方程，得到 Q 点坐标，即可得证.

【小问 1 详解】

因为 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，且边 AC,AB 上的两条中线长度之和为 $3\sqrt{6}$，

所以 $|PB|+|PC|=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{6}=2\sqrt{6}>|BC|$，

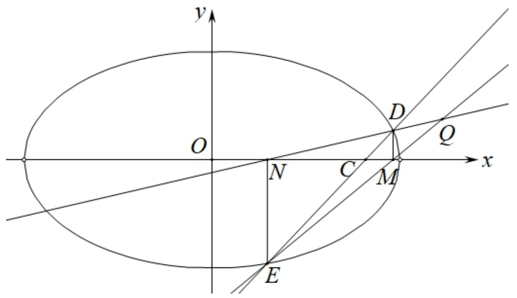
故由椭圆的定义可知 P 的轨迹 Γ 是以 $B(-2,0),C(2,0)$ 为焦点的椭圆（不包括长轴的端点），

且 $a=\sqrt{6},c=2$，所以 $b=\sqrt{2}$，

所以 P 的轨迹 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\left(x\neq\pm\sqrt{6}\right)$.

【小问 2 详解】

依题意，设直线 DE 方程为 $x=my+2\left(m\neq 0\right)$，



联立 $\begin{cases}x=my+2\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$，得 $\left(m^2+3\right)y^2+4my-2=0$，

易知 $\Delta=16m^2+8\left(m^2+3\right)=24\left(m^2+1\right)>0$，

设 $D\left(x_1,y_1\right)$，$E\left(x_2,y_2\right)$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2+3}$，$y_1\cdot y_2=-\dfrac{2}{m^2+3}$，

因为 $DM\perp x$ 轴，$EN\perp x$ 轴，所以 $M\left(x_1,0\right)$，$N\left(x_2,0\right)$，

所以直线 DN：$y=\dfrac{y_1}{x_1-x_2}\left(x-x_2\right)$，直线 EM：$y=\dfrac{y_2}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$，

联立解得 $x_Q=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\dfrac{\left(my_1+2\right)y_2+\left(my_2+2\right)y_1}{y_1+y_2}=2+\dfrac{2my_1y_2}{y_1+y_2}$

$=2+\dfrac{2m\times\left(-\dfrac{2}{m^2+3}\right)}{-\dfrac{4m}{m^2+3}}=3$，

从而点 Q 在定直线 $x=3$ 上.

【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

（1）设直线方程，设交点坐标为 $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$；

（2）联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于 x（或 y）的一元二次方程，注意 Δ 的判断；

（3）列出韦达定理；

（4）将所求问题或题中的关系转化为 x_1+x_2、x_1x_2（或 y_1+y_2、y_1y_2）的形式；

（5）代入韦达定理求解.