2023--2024 学年第一学期期末调研试卷
高二数学参考答案

注意事项：答案仅供参考，其他合理答案也可酌情给分。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	C	D	B	B	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	ACD	AC	AD	BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{5}{3}$　　14. $\sqrt{41}$　　15. $2\sqrt{2}$　　16. $1+\sqrt{3}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

（1）$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle=3\times4\times\cos120^\circ=-6$………4分

（2）$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)^2=\left|\overrightarrow{CB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BA}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+2\left(\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)$

$=16+9+25+2\left(4\times3\times\cos60^\circ+3\times5\times\cos60^\circ+4\times5\times\cos90^\circ\right)=77$………9分

所以，$CD=\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{77}$………10分

18.（12 分）

（1）记$\{a_n\}$的公差为d，因为$a_3-a_5=-2d=4$，所以$d=-2$，………2 分

因为$a_4=a_1+3\times(-2)$，所以$a_1=10$，………4 分

所以$a_n=a_1+(n-1)\times(-2)=12-2n$. ………6 分

（2）因为$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n=-n^2+11n=-\left(n-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{121}{4}$………8分

所以，当n取与$\frac{11}{2}$最接近的整数即 5 或 6 时，S_n最大，………10 分　最大值为$S_5=S_6=30$. ………12 分

19.（12 分）

（1）设圆心$C(a,b)$，因为圆心C在直线l：$2x+y=0$上，所以$2a+b=0$，………2 分

因为A，B是圆上的点，所以$|AC|=|BC|$，

根据两点间距离公式，有$\sqrt{(a-2)^2+(b+4)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}$，即$a-b-3=0$，………4 分

解之可得$a=1,b=-2$，所以圆心$C(1,-2)$，半径$r=|AC|=\sqrt{(2-1)^2+(-4+2)^2}=\sqrt{5}$，………5 分

所求圆的标准方程为：$(x-1)^2+(y+2)^2=5$. ………6 分

（2）直线斜率为$k_{AB}=\frac{-4+1}{2+1}=-1$，所以所求直线的斜率也为$-1$，设所求直线方程为$x+y+m=0$，………8 分

所以圆心C到该直线的距离为$d=\frac{|1-2+m|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{5}$，解之得$m=1\pm\sqrt{10}$，………10 分

所以所求直线方程为：$x+y+1\pm\sqrt{10}=0$. ………12 分

20.（12 分）

（1）由$a_{n+1}+2a_n=3n+1$可得$a_{n+1}-(n+1)=-2(a_n-n)$，………2 分

因为 $a_1=0$，所以 $a_1-1=-1$，$a_n-n\neq 0$，所以 $\dfrac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=-2$，………4 分

所以 $\{a_n-n\}$ 是以 -1 为首项，-2 为公比的等比数列.………6 分

（2）设数列 $\{a_n-n\}$ 的前 n 项和为 T_n，则 $T_n=\dfrac{(-1)\left[1-(-2)^n\right]}{1-(-2)}=\dfrac{-1+(-2)^n}{3}$，………9 分

所以 $S_n=T_n+(1+2+3+\cdots+n)=\dfrac{-1+(-2)^n}{3}+\dfrac{n(1+n)}{2}$.………12 分

21.（12 分）

（1）因为 $AP\perp$ 平面ABC，$BC\subset$ 平面ABC，所以 $AP\perp BC$，…………2 分

又因为 $BC\perp PC$，$AP\cap PC=P$，所以 $BC\perp$ 平面PAC，…………4 分

又 $BC\subset$ 平面PBC，所以平面$PAC\perp$ 平面PBC.…………5 分

（2）由（1）$BC\perp$ 平面PAC，又 $AC\subset$ 平面APC，所以 $BC\perp AC$，…………6 分

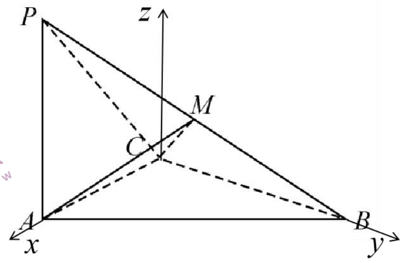
如图，作 $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AP}$ 分别以 $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC'}$ 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $Cxyz$，…………7 分

不妨设 $AC=BC=AP=1$，

则 $C(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$P(1,0,1)$，$M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{CA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CM}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，

设平面 ACM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z=0,\end{cases}$

取 $y=1$，则平面 ACM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$.…………8 分



取 PC 的中点 $N\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$，$AN\perp PC$，所以 $AN\perp$ 平面PBC，

所以平面 PBC 的一个法向量为 $\overrightarrow{AN}=\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$，…………9 分

所以 $\left|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AN}>\right|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AN}|}\right|=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}$，…………11 分

所以平面 ACM 与平面 PBC 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.…………12 分

22.（12 分）

（1）$\dfrac{|BF|}{|AB|}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，…………2 分

$4a^2=3\left(b^2+a^2\right)\Rightarrow a^2=3b^2$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.…………4 分

（2）（i）设 $A(a,\ 0)$，$M(x_1,\ y_1)$，$N(-x_1,-y_1)$，则 $k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1-a}$，$k_{AN}=\dfrac{y_1}{x_1+a}$，$k_{AM}\cdot k_{AN}=\dfrac{{y_1}^2}{{x_1}^2-a^2}$，……5 分

由 $\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$，得 $\dfrac{{y_1}^2}{{x_1}^2-a^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，…………7 分　　所以 $k_{AM}\cdot k_{AN}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{3}$ 为定值.…………8 分

（ii）记 $k_{AM}=k_1>0$，$k_{AN}=k_2<0$，则直线 $AM:y=k_1(x-a)$,所以$D(0,-ak_1)$，同理 $E(0,-ak_2)$，………9 分

所以 $S_{\Delta ADE}=\dfrac{1}{2}a(ak_1-ak_2)=\dfrac{1}{2}a^2(k_1-k_2)=\dfrac{1}{2}a^2\left(k_1+\dfrac{1}{3k_1}\right)\geq\dfrac{\sqrt{3}a^2}{3}=\sqrt{3}$，…………10 分

所以 $a^2=3$，当且仅当 $k_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时“=”成立，此时 $b^2=1$，…………11 分

所以椭圆 D 的方程为：$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.…………12 分