长郡中学 2023 年下学期高一期末考试

数学参考答案

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	B	A	B	D	B	B	A	B

6. B 【解析】当 $x>1$ 时,$g(x)=3^x-3>0$,由于题中条件可得,$f(x)<0$ 对$[1,+\infty)$恒成立,

当 $m\geqslant 0$ 时,显然不符合条件;

当 $m<0$ 时,$f(x)=0$ 的 2 个根为 $x_1=2m,x_2=-m-3$,

$\begin{cases}x_1=2m<1,\\x_2=-m-3<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{2},\\m>-4\end{cases}$和大前提 $m<0$ 取交集结果为$-4<m<0$,故答案为 B.

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

题号	9	10	11	12
答案	AD	BCD	ABC	ACD

9. AD 【解析】由关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 解集为$\{x\mid x<-3$或$x>2\}$,知-3 和 2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根,且 $a>0$,故 A 正确;

根据根与系数的关系知:$-\dfrac{b}{a}=-3+2=-1<0,\dfrac{c}{a}=-3\times 2=-6<0$,

$\therefore b=a,c=-6a,a>0$,

选项 B:不等式 $bx+c>0$ 化简为 $x-6>0$,解得:$x>6$,故 B 不正确;

选项 C:$a+b+c=a+a-6a=-4a<0$,故 C 不正确;

选项 D:不等式 $cx^2-bx+a<0$ 化简为:$6x^2+x-1>0$ 解得:$x\in\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{1}{2}\text{或 }x>\dfrac{1}{3}\right\}$,故 D 正确;故选 AD.

10. BCD 【解析】对于 A 选项,$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$,

当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时取得等号,故 A 错误;

对于 B 选项,$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}\leqslant 2(a+b)=2$,故$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$,

当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时取得等号,故 B 正确;

对于 C 选项,$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4},\therefore a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$,

当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时取得等号,故 C 正确;

对于 D 选项,$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}=\dfrac{1}{3}[(a+1)+(b+1)]\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(2+\dfrac{b+1}{a+1}+\dfrac{a+1}{b+1}\right)\geqslant\dfrac{4}{3}$,

当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时取得等号成立,故 D 正确;故选 BCD.

11. ABC 【解析】将函数 $f(x)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度,

所得图象对应的函数为 $g(x)=3\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,

对于 A,当 $x=\dfrac{\pi}{12}$,可得 $g(x)=0$,正确;

对于 B,当 $x=\dfrac{\pi}{3}$时,$g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=3$,正确;

对于 C,当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{24},\dfrac{5\pi}{24}\right]$时,$2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$,$g(x)$递增,故正确;

对于 D，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$g(x)$递增，故错误，

故选 ABC.

12. ACD 【解析】$f(2x+1)$为偶函数，则函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，

$f(4-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称，

$\begin{cases}f(2+x)+f(2-x)=0,\\ f(2-x)=f(x),\end{cases}$即 $f(2+x)+f(x)=0$.

A 选项，令 $x\to -x$，则 $f(2-x)=-f(-x)$，即 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(x)$为奇函数，A 正确；

B 选项，$f(4+x)=-f(2+x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$是周期函数，4 为其一个周期，

$f(1)=2$，$f(3)=-f(1)=-2$，显然 $f(3)\neq f(1)$，故 B 错误；

C 选项，$g(x)=g(2-x)$，所以函数 $g(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，因此函数 $f(x)$与 $g(x)$的交点也关于 $x=1$ 对称，则 $y_{1012}=f(1)=2$，故 C 正确；

D 选项，$\sum\limits_{i=1}^{2023}x_i=2023$，故 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 4

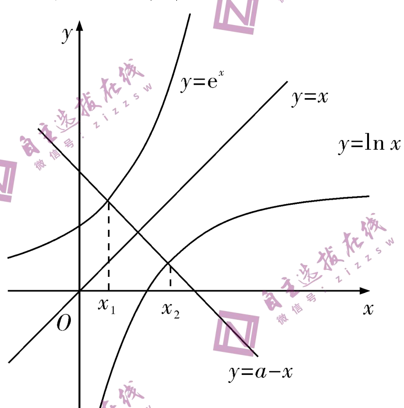
14. $2\sqrt{2}$

15. $\frac{1}{5}$

16. $(2,+\infty)$

【解析】x_1，x_2 分别为 $y=e^x$、$y=\ln x$ 与 $y=a-x$ 图象交点的横坐标，

而 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，如图所示：



$\therefore e^{x_1}=x_2$，

$\therefore m=e^{x_1}+x_2=2x_2\in(2,+\infty)$.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.【解析】(1)原式$=(\pi-3)+2+\frac{9}{4}-\frac{1}{4}+1=\pi+2$，…………（5 分）

(2)原式$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\log_2 3\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\log_3 2+\frac{3}{4}-5=-3$. …………（10 分）

18.【解析】(1)不等式$\frac{2x}{x-1}\geqslant 4$，移项得$\frac{2x}{x-1}-4\geqslant 0$，通分得$\frac{4-2x}{x-1}\geqslant 0$，

可转化为 $2(x-2)(x-1)\leqslant 0$ 且 $x\neq 1$，

解得 $1<x\leqslant 2$，不等式解集为$\{x|1<x\leqslant 2\}$. …………（6 分）

(2)令 $y=|2x-3|+|x-2|=\begin{cases}3x-5, x\geqslant 2,\\ x-1, \frac{3}{2}<x<2,\\ -3x+5, x\leqslant\frac{3}{2},\end{cases}$

当 $x\geqslant 2$ 时，$3x-5\leqslant 3$，解得 $x\leqslant\frac{8}{3}$，即 $x\in\left[2,\frac{8}{3}\right]$；

当$\frac{3}{2}<x<2$ 时，$x-1\leqslant 3$，解得 $x\leqslant 4$，即 $x\in\left(\frac{3}{2},2\right)$；

当 $x\leqslant\frac{3}{2}$时，$-3x+5\leqslant 3$，解得 $x\geqslant\frac{2}{3}$，即 $x\in\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$；

综上所述：不等式解集为$\left\{x\left|\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{8}{3}\right.\right\}$. ……………………………………………………………………………………………（12 分）

19.【解析】(1)依题意，设函数表达式为 $d=A\sin(\omega t+\varphi)+\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

水轮半径为 3m，所以振幅 $A=3$，

水轮每分钟按逆时针方向转动 1.5 圈，故角速度为 $\omega=\frac{1.5\times2\pi}{60}=\frac{\pi}{20}$，

水轮上点 P 从水中浮现时开始计时，所以 $3\sin\left(\frac{\pi}{20}\times0+\varphi\right)+\frac{3\sqrt{2}}{2}=0$，且 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

解得 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

所以函数表达式为 $d=3\sin\left(\frac{\pi}{20}t-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

故 $A=3$，$\omega=\frac{\pi}{20}$，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，$K=\frac{3\sqrt{2}}{2}$；………………………………………………………………………………（8 分）

(2)令$\frac{\pi}{20}t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

可得 $t=15$(s).

∴盛水筒出水后至少约 15 s 就可到达最高点. ………………………………………………………………………（12 分）

20.【解析】(1)由题意，函数 $f(x)=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$，

因为 $f(x)$的最小正周期$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$，所以函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$；…………………………………………………………（6 分）

(2)因为 $f(x)\geqslant1$，所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，

所以$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得$\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

因为 $x\in(-\pi,\pi)$，当 $k=-1$ 时，$x\in\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{5\pi}{12}\right]$，当 $k=0$ 时，$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right]$，

所以原不等式的解集为$\left\{x\left|-\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant-\frac{5\pi}{12}\text{或}\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}\right.\right\}$. …………………………………………………（12 分）

21.【解析】(1)令 $x=y=0$，代入 $f(x+y)=f(x)+f(y)$可得 $f(0)=0$，

令 $y=-x$，代入 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，可得 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$，

所以 $f(-x)=-f(x)$，可得函数 $f(x)$为奇函数；

任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，$x_2-x_1>0$，

因为 $f(x+y)-f(x)=f(y)$，即 $f(x+y)-f(x)=f[(x+y)-x]=f(y)$，

令 $x_2=x+y$，$x_1=x$，则 $y=x_2-x_1$，可得 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)$，

又因为 $x>0$ 时，$f(x)<0$，且 $x_2-x_1>0$，所以 $f(x_2-x_1)<0$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$，所以函数 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的减函数. …………………………………………（6 分）

(2)$-f(|x|)=f(-|x|)$，即$-2f(|x|)=2f(-|x|)$，

所以 $g(x)=f(x^2-m)-2f(|x|)=f(x^2-m)+2f(-|x|)=f(x^2-m)+f(-|x|)+f(-|x|)$

$=f(x^2-2|x|-m)$，

令 $g(x)=0$，即 $f(x^2-2|x|-m)=0=f(0)$，

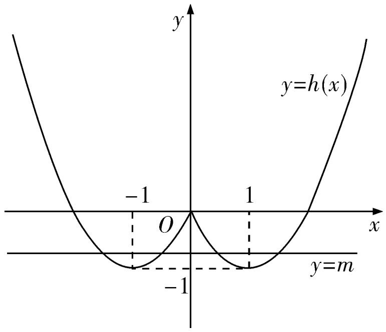
因为函数 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $x^2-2|x|-m=0$，即 $m=x^2-2|x|$，

令 $h(x)=x^2-2|x|=\begin{cases}x^2-2x,x\geqslant0,\\x^2+2x,x<0,\end{cases}$

则函数 $h(x)$的图象，如图所示，

结合图象，可得：当 $m\in(-1,0)$ 时，函数 $g(x)$ 有 4 个零点，

即实数 m 的取值范围为 $(-1,0)$. ……………………………………………………………………………………………………（12 分）



22.【解析】(1) 由函数 $f(x)$ 是定义域在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

则对于 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=f(x)$，即 $e^{-x}-k\cdot e^{x}=e^{x}-k\cdot e^{-x}$，

即对于 $x\in\mathbf{R}$，都有 $(k+1)\cdot e^{x}=(k+1)\cdot e^{-x}$，得 $k=-1$. ……………………………………………………（3 分）

(2) 结合 (1) 可得 $f(x)=e^{x}+e^{-x}$，

则 $g(x)=a(e^{x}+e^{-x}-2e^{-x})-e^{2x}-e^{-2x}-8=a(e^{x}-e^{-x})-(e^{2x}+e^{-2x})-8$，

令 $t=e^{x}-e^{-x}$，

由 $y=e^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$y=e^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以 $t=e^{x}-e^{-x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递增，得 $t>e-\frac{1}{e}$，

则不等式 $g(x)<0$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立等价于 $a<\frac{(e^{2x}+e^{-2x})+8}{e^{x}-e^{-x}}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $a<\left[\frac{(e^{2x}+e^{-2x})+8}{e^{x}-e^{-x}}\right]_{\min}$ 即可，

又 $\frac{(e^{2x}+e^{-2x})+8}{e^{x}-e^{-x}}=\frac{(e^{x}-e^{-x})^{2}+10}{e^{x}-e^{-x}}=e^{x}-e^{-x}+\frac{10}{e^{x}-e^{-x}}=t+\frac{10}{t}$，

由对勾函数的性质可得当 $t=\sqrt{10}$ 时，$t+\frac{10}{t}$ 取得最小值 $2\sqrt{10}$，

所以 $\frac{(e^{2x}+e^{-2x})+10}{e^{x}-e^{-x}}$ 的最小值为 $2\sqrt{10}$，即 $a<2\sqrt{10}$，

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2\sqrt{10})$. ……………………………………………………………………………（8 分）

(3) 令 $e^{x}=u$，$u>0$，由对勾函数的性质可得当 $u=1$ 时，$u+\frac{1}{u}$ 取得最小值 2，

所以 $f(x)=e^{x}+e^{-x}\geqslant 2$，则 $h(x)=\log_{2}f(x)\geqslant 1$，

令 $p=h(x)-1$，则 $p\geqslant 0$，

则原问题转化为关于 p 的方程 $(p+m)(p-4m)+2m^{2}+m=p^{2}-3mp-2m^{2}+m=0$ 的根的个数，

对于 $p\geqslant 0$ 有解，令 $F(p)=p^{2}-3mp-2m^{2}+m$，则 $F(p)$ 表示开口向上的抛物线，

$\Delta=(-3m)^{2}-4(-2m^{2}+m)=17m^{2}-4m$，

① 当 $\Delta=17m^{2}-4m=0$ 时，$m=\frac{4}{17}$ 或 $m=0$，此时对称轴 $p=\frac{3m}{2}\geqslant 0$，

函数 $F(p)$ 在 $[0,+\infty)$ 有唯一零点；

② 当 $\Delta\neq 0$ 且 $F(p)$ 在 $[0,+\infty)$ 有唯一零点时，

$F(0)=-2m^{2}+m<0$，可得：$m<0$ 或 $m>\frac{1}{2}$；

③ 当 $F(p)$ 在 $[0,+\infty)$ 有两个不相等零点时，

$$\begin{cases}\Delta=(-3m)^{2}-4\times 1\times(-2m^{2}+m)=17m^{2}-4m>0,\\ p_{1}+p_{2}=3m>0,\\ p_{1}\cdot p_{2}=-2m^{2}+m\geqslant 0,\end{cases}$$

可得：$\frac{4}{17}<m\leqslant\frac{1}{2}$.

综上：$m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant\frac{4}{17}$. ……………………………………………………………………………………（12 分）