

雅礼中学 2024 届高三月考试卷(五)

数学参考答案

一、二、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	A	C	A	A	B	AC	BD	AC	BC

1. C 【解析】 $B = \{x | x^2 < 2\} = \{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$, 所以 $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1\} \cap \{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\} = \{-1, 0, 1\}$, 故选: C.

2. D 【解析】由题意, $a^2 > b^2 > 0$, 所以 $\log_2 a^2 > \log_2 b^2$, 故 D 正确; 当 $a = -2, b = -1$ 时, $a^2 > b^2 > 0$, 但 $a < b, 2^a < 2^b, a < |b|$, 故 A, B, C 错误. 故选: D. 来源: 高三答案公众号

3. C 【解析】由已知焦点为 $(0, 1)$, 故抛物线上的点到焦点的距离为 $d = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{y^2 + 2y + 1} = \sqrt{(y+1)^2} = y+1 \geq 1$, 当 $x=y=0$ 时等号成立, 当然也可作图, 利用抛物线的定义, 故选: C.

4. A 【解析】由 $|a+b| = \sqrt{10}$, 得 $|a+b|^2 = |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = 10$, 由 $|a-b| = \sqrt{6}$, 得 $|a-b|^2 = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = 6$, 两式相减得 $a \cdot b = 1$, 所以 $a \cdot b = 1$. 故选: A.

5. C 【解析】 $\because \cos \alpha = \frac{1}{4}, \therefore \sin 2(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \sin(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2\alpha = -2\cos^2 \alpha + 1 = -2 \times \frac{1}{16} + 1 = \frac{7}{8}$, 故选: C.

6. A 【解析】由题意大约能用 $\frac{2^{441}}{3 \times 10^{11} \times 10}$ 万年, 则 $\lg \frac{2^{441}}{3 \times 10^{12}} = 441 \lg 2 - \lg 3 - 15 \approx 441 \times 0.3 - 0.5 - 15 \approx 117$, 所以 $\frac{2^{441}}{3 \times 10^{12} \times 10} \approx 10^{117}$, 故选: A.

7. A 【解析】对于 A, 已知 $S_n = 2a_n + 1$, 所以 $S_{n-1} = 2a_{n-1} + 1, a_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - 2a_{n-1} - 1 = 2a_n - 2a_{n-1} - 2$.

$$S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} - 2, a_n - 2a_{n-1} - 2 = 2a_n - 2a_{n-1} - 2, a_n - 2a_{n-1} = 2, \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2.$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, $a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$, 因为 $a_1 = 1$, 符合上式,

所以数列 $\{a_n\}$ 是通项为 $a_n = 2^{n-1}$ 的等比数列, A 选项正确;

对于 B, 已知 $S_n = 2^n + 1$, 所以 $S_{n-1} = 2^{n-1} + 1, a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n + 1 - 2^{n-1} - 1 = 2^n$,

$$S_{n-1} - S_{n-2} = 2^{n-1} + 1 - 2^{n-2} - 1 = 2^{n-1} - 2^{n-2} = 2^{n-2}, a_{n-1} = 2^{n-1} - 2^{n-2} = 2^{n-2},$$

因为 $a_n \neq 3$, 不符合上式, 所以 B 选项错误;

对于 C, 已知 $a_{n+1} = 2a_n$, 当首项为零时, 不符合题意, C 选项错误;

对于 D, 已知 $\{S_n\}$ 是等比数列, 则设 $\{S_n\}$ 的通项公式为 $S_n = S_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot q^{n-1}$,

$$S_{n+1} - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \cdot q^{n-1}, a_{n+1} = a_1(q-1) \cdot q^{n-1}, a_n = a_1(q-1) \cdot q^{n-2},$$

不符合等比数列的通项公式, D 选项错误. 故选: A.

8. B 【解析】 $f'(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}$, 令 x_0 为函数 $f(x) = (x-1)\ln x$ 在区间 $[1, 2]$ 上的“拉格朗日中值点”,

则 $1 + \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \ln 2$, 令 $g(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x} - \ln 2$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ 在区间 $[1, 2]$ 上恒成立, 故 $g(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x} - \ln 2$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 又 $g(1) = -\ln 2 < 0, g(2) = 1 - \frac{1}{2} - \ln 2 > 0$,

由零点存在性定理可得: 存在唯一的 $x_0 \in [1, 2]$, 使得 $g(x_0) = 0$. 故选: B.

9. AC 【解析】当取 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, c = \frac{2}{3}$ 时, 可知 A 正确, B 错误; $D(y) = D(cx+c) = c^2 D(x)$, 故 $c = \pm 1$ 时方差可能相同, 故 C 正确;

由极差的定义知: 若第一组的极差为 $x_{\max} - x_{\min}$, 则第二组的极差为 $y_{\max} - y_{\min} = |(cx_{\max} + c) - (cx_{\min} + c)| = |cx_{\max} - cx_{\min}|, c = \pm 1$ 时极差相同, 故 D 错误, 故选: AC.

10. BD 【解析】 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 整理得: $(x-2)^2 + y^2 = 1$,

$\because x=4, y=0$ 时 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 3 > 0, \therefore$ 点 $(4, 0)$ 在圆 M 外, A 错;

$\because$ 圆心 $M(2, 0)$ 在直线 $x+3y-2=0$ 上, $\therefore$ 圆 M 关于直线 $x+3y-2=0$ 对称, B 对;

$\because$ 圆 M 半径为 1, 故 C 错;



∴ 圆心 $M(2,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 的距离为 $d=\frac{|2|}{\sqrt{1+3}}=1$, 与半径相等,

∴ 直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 与圆 M 相切, D 对.

故选: BD.

11. AC 【解析】令 $x=y=1$, 得 $f(1)=0$, A 正确; 令 $x=y=-1$, 得 $f(-1)=0$, 令 $y=-1$, 得 $f(-x)=-f(x)+\frac{f(-1)}{x}=-f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数, C 正确; 由 $f(xy)=\frac{f(x)}{y}+\frac{f(y)}{x}$, 可得 $xyf(xy)=xf(x)+yf(y)$, 根据

函数结构举例, 当 $x>0$ 时, 可设 $xf(x)=\ln x$, 则 $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x>0, \\ \frac{\ln(-x)}{x}, & x<0. \end{cases}$ 当 $x>0$ 时, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $f(2)=\frac{\ln 2}{2}$, B 错误; 当 $x\in(0,e)$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x\in(e,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单

调递增, 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减, 此时 $f(x)$ 有极值点, D 错误; 故选: AC.

12. BC 【解析】收到信号为 0, 0 概率为 $\beta(1-\alpha)$, 则传回信号为 1, 0 概率为 $\alpha\beta(1-\alpha)^2$, 收到信号为 1, 0 概率为 $(1-\alpha)(1-\beta)$, 则传回信号为 1, 0 概率为 $[(1-\alpha)(1-\beta)]^2$, 收到信号为 0, 1 概率为 $\alpha\beta$, 则传回信号为 1, 0 概率为 $(\alpha\beta)^2$, 收到信号为 1, 1 概率为 $\alpha(1-\beta)$, 则传回信号为 1, 0 概率为 $\alpha\beta(1-\beta)^2$, 所以传回信号为 1, 0 概率为 $\alpha\beta(1-\alpha)^2+(\alpha\beta)^2+[(1-\alpha)(1-\beta)]^2+\alpha\beta(1-\beta)^2$, 显然“收到的信号为 1, 0”不是“传回的信号为 1, 0”的充分条件, A 错误; $[(1-\alpha)(1-\beta)]^2+\alpha\beta(1-\alpha)^2+(\alpha\beta)^2+[(1-\alpha)(1-\beta)]^2+\alpha\beta(1-\beta)^2$ 不一定等于 $[(1-\alpha)(1-\beta)]^2$, B 正确; 由 $\alpha=\beta$, 则 $\alpha\beta(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2+[(1-\alpha)(1-\beta)]^2+(\alpha\beta)^2=(1-\alpha)^2+\alpha^2$, 而 $(1-\alpha)^2+\alpha^2=\frac{(1-\alpha+\alpha)^2}{2}=\frac{1}{2}$, 而 $\alpha\neq\frac{1}{2}$, 即不能取等号, 故 $(1-\alpha)^2+\alpha^2>\frac{1}{2}$, 所以 $\alpha\beta(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2+[(1-\alpha)(1-\beta)]^2+(\alpha\beta)^2>\frac{1}{4}$, C 正确; 由 $\alpha=0.8, \beta=0.6$, 则 $\alpha\beta(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2+[(1-\alpha)(1-\beta)]^2+(\alpha\beta)^2=0.3328$, D 错误. 故选: BC.

三、填空题: 本题共 1 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】 $z=\frac{1}{1-2i}=\frac{1(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1+2i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$, 所以 $|z|=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

14. $(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 【解析】因为 $\lambda x^2+y^2=1$ 为双曲线方程, 所以 $\lambda<0$, 即 $y^2-\frac{x^2}{-\frac{1}{\lambda}}=1$, 所以双曲线的顶点坐标为 $(0, \pm 1)$.

15. $1<\omega\leq 7$ 【解析】要使函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上恰有一个极值点, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上恰有一个最值,

所以 $\omega x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上有唯一解, 解得 $x=\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{\omega}, k\in\mathbb{Z}$,

由于 $0<x<\frac{\pi}{6}$, 即 $\begin{cases} 0<\frac{\pi}{6\omega}<\frac{\pi}{6}, \\ \frac{\pi}{6\omega}+\frac{\pi}{\omega}\geq\frac{\pi}{6}, \end{cases}$ 解得 $1<\omega\leq 7$.

16. $\frac{9\pi}{8}$ 【解析】以点 D 为原点建立空间直角坐标系如图所示:

依题意得: $C(0,2,0), E(1,2,1), F(0,1,2)$,

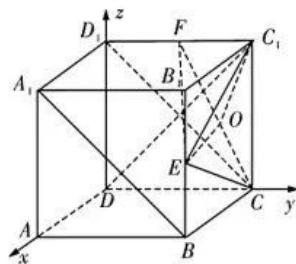
则 $\vec{EC}=(-1,0,-1), \vec{EF}=(-1,-1,1)$,

所以 $\vec{EC}\cdot\vec{EF}=1+0-1=0$, 则 $\vec{EF}\perp\vec{EC}$, 即 $EF\perp EC$;

设 O 为 CF 中点, 因为 $EF\perp EC, C_1F\perp C_1C$, 则 $EO=OC=FO=C_1O$,

所以点 O 为三棱锥 C_1-CEF 外接球的球心,

则三棱锥 C_1-CEF 外接球的半径为 $R=\frac{1}{2}CF=\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,





设球心 O 到平面 A_1BCD_1 的距离为 h , 又因为 O 为 CF 中点,

所以点 F 到平面 A_1BCD_1 的距离为 $2h$, 由于 $2h = \frac{1}{4}C_1D = \frac{1}{4} \times \sqrt{2^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $h = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

故截面圆的半径为 $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{\frac{9}{8}}$, 所以截面圆面积为 $\pi r^2 = \frac{9\pi}{8}$. 来源: 高三答案公众号

四. 解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 因为 $a_1 = 1, S_n = a_{n+1} - 1$. 所以 $S_1 = a_2 - 1$, 解得 $a_2 = 2$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = a_n - 1$, 所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, 所以 $2a_n = a_{n+1}$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

因为 $\frac{a_2}{a_1} = 2$ 也满足上式, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$ 5 分

(2) 由(1)知 $a_{n+1} = 2^n$, 所以 $b_n = \frac{n}{2^n}$ 6 分

$$\text{所以 } T_n = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2}T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} - n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{n}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ 所以 } T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}. \quad \text{..... 10 分}$$

18. 【解析】(1) 依题意, $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{a^2}{4}$, 即 $bc \sin A = \frac{a^2}{2}$,

$$\text{由正弦定理得 } \sin B \sin C \sin A = \frac{1}{2} \sin^2 A,$$

$$\text{因为 } \sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 所以 } \sin B \sin C = \frac{1}{2} \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{20}. \quad \text{..... 6 分}$$

(2) 由(1)得 $a = 2bc \sin A$.

$$\text{由余弦定理得 } b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A = 2bc (\sin A + \cos A) = 2\sqrt{2}bc \sin \left(A + \frac{\pi}{4}\right). \quad \text{..... 7 分}$$

$$\text{所以 } \frac{c}{b} + \frac{b}{c} = \frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{2\sqrt{2}bc \sin \left(A + \frac{\pi}{4}\right)}{bc} = 2\sqrt{2} \sin \left(A + \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{..... 10 分}$$

$$\text{所以当 } A + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, A = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{ 取得最大值为 } 2\sqrt{2}. \quad \text{..... 12 分}$$

19. 【解析】(1) $\because AB$ 为圆台下底面圆 O 的直径, C 是圆 O 上异于 A, B 的点, 故 $\angle ACB = 90^\circ$,

又 $\because \angle BAC = 30^\circ, AC = 2\sqrt{3}, \therefore AB = 4 = MB$,

$\because AC = MC, BC = BC, \therefore \triangle ABC \cong \triangle MBC$,

$\therefore \angle BCM = 90^\circ, \therefore BC \perp MC$,

又 $\because BC \perp AC, AC \cap MC = C, AC, MC \subset \text{平面 } MAC$,

$\therefore BC \perp \text{平面 } MAC$ 6 分

(2) 取 AC 的中点 D , 连接 DM, DO , 则 $MD \perp AC, OD \perp AC$, 由(1)可知, $BC \perp DM$,

$\because AC \cap BC = C, \therefore DM \perp \text{平面 } ABC$,

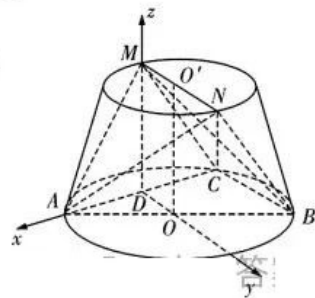
以 D 为原点, DA 为 x 轴, DO 为 y 轴, DM 为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

由题意可得 $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(-\sqrt{3}, 2, 0)$,

$\because OO' \perp \text{平面 } ABC, \therefore DM \parallel OO'$, 四边形 $ODMO'$ 为矩形, $\therefore N(0, 2, 3)$,

平面 MAC 的一个法向量为 $n_1 = (0, 1, 0)$.

设平面 NAB 的一条法向量为 $n_2 = (x, y, z)$,





$$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3}, 2, 0), \overrightarrow{AN}=(-\sqrt{3}, 2, 3),$$

$$\text{由} \begin{cases} n_2 \cdot \overrightarrow{AB}=0, \\ n_2 \cdot \overrightarrow{AN}=0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -2\sqrt{3}x+2y=0, \\ -\sqrt{3}x+2y+3z=0, \end{cases} \text{令 } x=\sqrt{3}, \text{ 则 } y=3, z=-1,$$

∴平面 NAB 的一个法向量为 $n_2=(\sqrt{3}, 3, -1)$,

$$\text{则平面 MAC 与平面 NAB 的夹角的余弦值为 } \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| |n_2|} = \frac{?}{\sqrt{3+9+1} \times 1} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

∴平面 MAC 和平面 NAB 夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ 12 分

20. 【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

当 $a=4$ 时, $f(x)=(x+1)\ln x-4(x-1)$,

$$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-3, f'(1)=-2, f(1)=0.$$

曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x+y-2=0$ 4 分

(2) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 等价于 $\ln x - \frac{a(x-1)}{x+1} > 0$.

$$\text{设 } g(x)=\ln x - \frac{a(x-1)}{x+1}, \text{ 则 } g'(x)=\frac{1}{x} - \frac{2a}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}, g(1)=0,$$

① 当 $a \leq 2$, $x \in (1, +\infty)$ 时, $x^2+2(1-a)x+1 \geq x^2-2x+1 > 0$,

故 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 因此 $g(x) > 0$; 8 分

② 当 $a > 2$ 时, 令 $g'(x)=0$ 得 $x_1=a-1-\sqrt{(a-1)^2-1}$, $x_2=a-1+\sqrt{(a-1)^2-1}$.

由 $x_1 > 1$ 和 $x_2 > 1$ 得 $a > 2$.

故当 $x \in (1, x_1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(1, x_1)$ 单调递减, 因此 $g(x) < 0$ 11 分

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$ 12 分

21. 【解析】(1) 由点 $P(1, \frac{3}{2})$ 和 F_2 关于点 $C(0, \frac{3}{4})$ 对称, 得 $F_1(-1, 0)$,

所以椭圆 E 的焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$,

由椭圆定义, 得 $2a=|PF_1|+|PF_2|=4$.

$$\text{所以 } a=2, b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3},$$

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 1 分

(2) 结论: 存在直线 l , 使得四边形 $PABQ$ 的对角线互相平分. 理由如下: 5 分

由题可知直线 l , 直线 PQ 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$, 直线 PQ 的方程为 $y-\frac{3}{2}=k(x-1)$,

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x-1), \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0,$$

由题意, 可知 $\Delta > 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}, x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}, \text{ 7 分}$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y - \frac{3}{2} = k(x-1), \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 - (8k^2-12k)x + 4k^2-12k-3=0,$$

由 $\Delta > 0$, 可知 $k \neq -\frac{1}{2}$, 设 $Q(x_3, y_3)$, 又 $P(1, \frac{3}{2})$,

$$\text{则 } x_3+1=\frac{8k^2-12k}{3+4k^2}, x_3 \cdot 1=\frac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}$$

若四边形 $PABQ$ 的对角线互相平分, 则 PB 与 AQ 的中点重合,

$$\text{所以 } \frac{x_1+x_3}{2} = \frac{x_2+1}{2}, \text{ 即 } x_1-x_2=1-x_3, \text{ 故 } (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(1-x_3)^2,$$



所以 $\left(\frac{8k^2}{3+4k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4k^2-12}{3+4k^2} = \left(1 - \frac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}\right)^2$, 解得 $k = \frac{3}{4}$, 10 分

所以直线 l 为 $3x-4y-3=0$ 时, 四边形 $PABQ$ 的对角线互相平分. 12 分

22. 【解析】(1) 由题知, 随机变量 X 服从二项分布, $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$,

由 $P(X=5) = P(X=95)$, 即 $C_n^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-5} = C_n^{95} \left(\frac{1}{2}\right)^{95} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-95}$,

得 $n=100$, 所以 $E(X) = np = 50$ 3 分

(2) (i) $A = "X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{10} = x_{10}"$,

$P(A) = [C_{10}^1 p (1-p)^9]^3 [C_{10}^2 p^2 (1-p)^8]^3 [C_{10}^3 p^3 (1-p)^7]^2 [C_{10}^4 p^4 (1-p)^6] [C_{10}^6 p^6 (1-p)^4]$,

$P(A) = (C_{10}^1)^3 (C_{10}^2)^3 (C_{10}^3)^2 (C_{10}^4)^2 p^{25} (1-p)^{75}$ 6 分

(ii) 记 $g(p) = \ln(C_{10}^1)^3 (C_{10}^2)^3 (C_{10}^3)^2 (C_{10}^4)^2 + 25 \ln p + 75 \ln(1-p)$.

则 $g'(p) = \frac{25}{p} - \frac{75}{1-p} = \frac{25-100p}{p(1-p)}$.

当 $0 < p < \frac{1}{4}$ 时, $g'(p) > 0$, $g(p)$ 单调递增;

当 $\frac{1}{4} < p < 1$ 时, $g'(p) < 0$, $g(p)$ 单调递减;

当 $p = \frac{1}{4}$ 时, $g(p)$ 取得最大值, 即 P 取得最大值. 8 分

在团体 A 提出的函数模型 $p = \ln(1-\theta) - \frac{2}{3}\theta$, ($0 < \theta < 1$) 中,

记函数 $f_1(x) = \ln(1-x) - \frac{2}{3}x^2$, ($0 < x < 1$), $f_1'(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{4}{3}x = \frac{-4x^2-4x+3}{3(1-x)}$.

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f_1'(x) > 0$, $f_1(x)$ 单调递增; 当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f_1'(x) < 0$, $f_1(x)$ 单调递减.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f_1(x)$ 取得最大值 $\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{6} < \frac{1}{4}$ ($\ln \frac{3}{2} \approx 0.4055$), 则 θ 不可以估计. 10 分

在团体 B 提出的函数模型 $p = \frac{1}{2}(1 - e^{-\theta})$ 中, 记函数 $f_2(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x})$, $f_2(x)$ 单调递增,

令 $f_2(x) = \frac{1}{4}$, 解得 $x = \ln 2$, 11 分

则团队 B 可以求出 θ 的最大似然估计, 且 $\theta_0 = \ln 2$ 是 θ 的最大似然估计. 12 分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线