# 数学参考答案及解析

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | C | A | B | C | B | C | A | BC | BCD | ACD | CD |

1.【答案】D

【解析】由不等式$\frac{x+2}{x-1}>0$,等价于$(x+2)(x-1)>0$,解得$x<-2$或$x>1$,因为$B=\{x|x\leqslant 1\}$,

所以$\complement_U B=\{x|x>1\}$,所以$A\cap(\complement_U B)=\{x|x>1\}$.故选D.

2.【答案】C

【解析】因为$z=1+\mathrm{i}^{2023}=1-\mathrm{i}$,所以$z^2-2=-2\mathrm{i}-2$在复平面上对应的点为$(-2,-2)$,该点在第三象限.故选C.

3.【答案】A

【解析】$\because \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$,又$\boldsymbol{c}=(-1,\sqrt{3})$,$\therefore \boldsymbol{c}$在向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\left[\frac{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}\right](\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\cdot$

$(1,\sqrt{3})=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.故选A.

4.【答案】B

【解析】因为$S_n$是等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和,所以$S_5,S_{10}-S_5,S_{15}-S_{10},S_{20}-S_{15},\cdots$是等差数列.

由$\frac{S_5}{S_{10}}=\frac{1}{3}$可设$S_5=t(t\neq 0)$,则$S_{10}=3t$,于是$S_5,S_{10}-S_5,S_{15}-S_{10},S_{20}-S_{15},\cdots$依次为$t,2t,3t,4t,\cdots$,

所以$S_{20}=t+2t+3t+4t=10t$,所以$\frac{S_{10}}{S_{20}}=\frac{3}{10}$.故选B.

5.【答案】C

【解析】由$-x^2+x+2>0$,得$(x+1)(x-2)<0$,解得$-1<x<2$,则$f(x)$的定义域为$\{x|-1<x<2\}$,当$x\in[0,1]$时,令$t=-x^2+x+2$,函数$y=-x^2+x+2$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调递增,在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调递减,又$u=\log_2 t$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调递增,在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调递减,所以$f(x)$的值域为$\left[1,\log_2\frac{9}{4}\right]$,所以$\lfloor f(x)\rfloor$的值域为$\{1\}$.故选C.

6.【答案】B

【解析】由题意得$V_{G-ABD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABD}\cdot BB_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\frac{4}{3}$,设点$B$到平面$GAD$的距离为$h$,则由等体积转化法为$V_{B-AGD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ADG}\cdot h=V_{G-ABD}=\frac{4}{3}$,由图形得,当$G$与$B_1$重合时,$S_{\triangle ADG}$最大,最大为$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,此时$h$最小,为$\sqrt{2}$.故选B.

7.【答案】C

【解析】$ax\cdot\mathrm{e}^{ax}-x\ln x\geqslant 0(x>0)$恒成立,即$\mathrm{e}^{ax}\ln\mathrm{e}^{ax}\geqslant x\ln x(x>0)$,

令$s(t)=t\ln t$,则$s'(t)=\ln t+1$,

当$0<t<\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$s'(t)<0$,$s(t)$单调递减,当$t>\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$s'(t)>0$,$s(t)$单调递增,

因为$a>0,x>0$,所以$\mathrm{e}^{ax}>1$,

因此若 $x>\frac{1}{e}$ 时，不等式 $e^{ax}\ln e^{ax}\geq x\ln x$ 恒成立，则 $e^{ax}>x$ 恒成立，

若 $0<x\leq\frac{1}{e}$ 时，$x\ln x<0$，$e^{ax}\ln e^{ax}\geq x\ln x$ 恒成立，则 $e^{ax}>x$ 也成立，

所以当 $x>0$ 时，$e^{ax}>x$ 恒成立，所以得 $ax\geq\ln x$，即 $a\geq\frac{\ln x}{x}$，

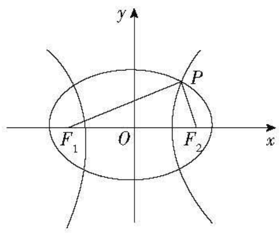
设 $u(x)=\frac{\ln x}{x}$，$u'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<e$ 时，$u'(x)>0$，$u(x)$ 单调递增，当 $x>e$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$ 单调递减，

所以 $u(x)_{\max}=u(e)=\frac{1}{e}$，所以 $a\geq\frac{1}{e}$，即正实数 $a$ 的最小值为 $\frac{1}{e}$，故选 C.

8.【答案】A

【解析】如图，设椭圆的长半轴长为 $a_1$，双曲线的实半轴长为 $a_2$，




则根据椭圆及双曲线的定义得：$|PF_1|+|PF_2|=2a_1$，$|PF_1|-|PF_2|=2a_2$，

$\therefore|PF_1|=a_1+a_2$，$|PF_2|=a_1-a_2$，设 $|F_1F_2|=2c$，$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，

则在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得，$4c^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-2(a_1+a_2)(a_1-a_2)\cos\frac{\pi}{3}$，

化简得 $a_1^2+3a_2^2=4c^2$，即 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$，

则 $\frac{e_1^2}{e_1^2+1}+\frac{3e_2^2}{e_2^2+3}=\frac{1}{\frac{1}{e_1^2}+1}+\frac{3}{\frac{3}{e_2^2}+1}=\left(\frac{1}{\frac{1}{e_1^2}+1}+\frac{3}{\frac{3}{e_2^2}+1}\right)\left(\frac{1}{e_1^2}+1+\frac{3}{e_2^2}+1\right)\times\frac{1}{6}$

$$=\frac{1}{6}\times\left[4+\frac{\frac{3}{e_2^2}+1}{\frac{1}{e_1^2}+1}+\frac{3\left(\frac{1}{e_1^2}+1\right)}{\frac{3}{e_2^2}+1}\right]\geq\frac{1}{6}\times(4+2\sqrt{3})=\frac{2+\sqrt{3}}{3},$$

当且仅当 $\begin{cases}\left(\frac{3}{e_2^2}+1\right)^2=3\left(\frac{1}{e_1^2}+1\right)^2,\\ \frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=\frac{1}{e_1^2}+1+\frac{3}{e_2^2}+1=6,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}e_1^2=\frac{3\sqrt{3}+4}{11}<1,\\ e_2^2=\frac{3}{8-3\sqrt{3}}>1\end{cases}$ 时，等号成立，故选 A.

9.【答案】BC

【解析】对于 A 项，11 个数的顺序为 4，9，11，14，15，17，20，26，27，29，30，$11\times75\%=8.25$，所以第 75 百分位数为 27，故 A 项错误；

对于 B 项，因为 $X\sim B\left(n,\frac{2}{3}\right)$，所以 $E(X)=np=\frac{2}{3}n$，所以 $E(2X-1)=2E(X)-1=\frac{4}{3}n-1=7$，解得 $n=6$，故 B 项正确；

对于 C 项，回归直线必过样本中心可得 $24=-3\hat{b}+9$，解得 $\hat{b}=-5$，故 C 项正确；

对于 D 项，$r$ 为正值时，值越大，判断“$x$ 与 $y$ 之间的正相关”越强，故 D 项不正确. 故选 BC.

10.【答案】BCD

【解析】由图象知$\frac{T}{2}=\frac{7\pi}{8}-\frac{5\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$,即函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\omega}$,$\therefore\omega=2$,最小正周期$T=\frac{\pi}{2}$,

$\because f\left(\frac{7\pi}{8}\right)=A\tan\left(2\times\frac{7\pi}{8}+\varphi\right)=0$,则$\frac{7\pi}{4}+\varphi=k\pi$,即$\varphi=k\pi-\frac{7\pi}{4}$,$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore$当$k=2$时,$\varphi=2\pi-\frac{7\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$,即$f(x)=A\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,故A不正确;

$\because f(0)=1$,$\therefore f(0)=A\tan\frac{\pi}{4}=1$,即$A=1$,则$f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

则$f\left(\frac{\pi}{24}\right)=\tan\left(2\times\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,故B正确;

因为$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,即$\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

即$\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]=0$,

又因为$\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$时,$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$,$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm1$,

所以$\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]=0\Leftrightarrow\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$,

因为$x\in[0,\pi]$,所以$\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$,

当$\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$时,$2x+\frac{\pi}{4}=\pi$或$2x+\frac{\pi}{4}=2\pi$,解得$x=\frac{3\pi}{8}$或$x=\frac{7\pi}{8}$,

所以方程$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)(x\in[0,\pi])$的解为$x=\frac{3\pi}{8}$或$x=\frac{7\pi}{8}$. 故C正确;

由$f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=\tan\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$,$f\left(\frac{3}{2}\right)=\tan\left(3+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(3-\frac{3\pi}{4}\right)$,

$f(2)=\tan\left(4+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(4-\frac{3\pi}{4}\right)$,$\because\frac{\pi}{2}<1+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$,$\frac{\pi}{2}<4-\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$,

$4-\frac{3\pi}{4}<1+\frac{\pi}{4}$,且$y=\tan x$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$上单调递增,$\therefore f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<\tan\frac{3\pi}{4}=-1$,

由$0<3-\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$,$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right)>0$,$\therefore f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)$,故D正确. 故选BCD.

11.【答案】ACD

【解析】当$p=2$时,抛物线方程为$y^2=4x$,直线$l:y=\frac{1}{2}(x+1)$,联立得$x^2-14x+1=0$,$x_1+x_2=14$,

则$|FA|+|FB|=x_1+x_2+p=14+2=16$,故A正确;

当$k=0$时,直线$l$为$x$轴,和抛物线只有一个交点,故B不正确;

直线$l:y=k\left(x+\frac{p}{2}\right)$,代入$y^2=2px$,得$k^2x^2+x(k^2p-2p)+\frac{k^2p^2}{4}=0$,$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$,$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,则

$\alpha+\beta=\pi\Leftrightarrow k_{AF}+k_{BF}=0$,

则$\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}+\frac{y_2}{x_2-\frac{p}{2}}=\frac{k\left(2x_1x_2-\frac{p^2}{2}\right)}{\left(x_1-\frac{p}{2}\right)\left(x_2-\frac{p}{2}\right)}=\frac{k\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p^2}{2}\right)}{\left(x_1-\frac{p}{2}\right)\left(x_2-\frac{p}{2}\right)}=0$,故C正确;

因为点$A$关于$x$轴的对称点为点$A'$,由C知,直线$A'B$与$BF$的倾斜角相同,

所以$A'$,$F$,$B$三点共线,所以直线$A'B$必恒过定点$F$,故D正确. 故选ACD.

12.【答案】CD

【解析】函数 $g(x)=\dfrac{2}{a}e^{x}+2x-1$ 的图象与 $h(x)$ 的图象有两个不同的交点，则方程 $h(x)=g(x)$ 有两个不同的根，即 $\dfrac{1}{a}xe^{x}+x^{2}=\dfrac{2}{a}e^{x}+2x-1\Leftrightarrow xe^{x}-2e^{x}=-a(x-1)^{2}(a\neq 0)$ 有两个不同的根，令

$f(x)=xe^{x}-2e^{x}+a(x-1)^{2}(a\neq 0)$，则 $f'(x)=(x-1)e^{x}+2a(x-1)=(x-1)(e^{x}+2a)$.

①若 $a>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$；

∴$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又∵$f(1)=-e$，$f(2)=a$，取实数 $b$ 满足 $b<0$ 且 $b<\ln\dfrac{a}{2}$，则有 $f(b)>\dfrac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^{2}=a\left(b^{2}-\dfrac{3}{2}b\right)>0$，所以 $f(x)$ 有两个零点.

②若 $a<0$，当 $a\geqslant -\dfrac{e}{2}$，$x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)<0$，故 $f(x)<0$，故 $f(x)$ 不存在两个零点，当 $a<-\dfrac{e}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\ln(-2a),+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,\ln(-2a)\right)$ 上单调递减，又当 $x\leqslant 1$ 时，故 $f(x)<0$，故 $f(x)$ 不存在两个零点，综上得 $a>0$，故选 CD.

13.【答案】$-\dfrac{7}{5}$

【解析】因为 $\tan\alpha=3$，所以 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)+\sin(2\alpha-\pi)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)-\sin(\pi-2\alpha)=\cos 2\alpha-\sin 2\alpha$

$=\cos^{2}\alpha-\sin^{2}\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\cos^{2}\alpha-\sin^{2}\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^{2}\alpha+\sin^{2}\alpha}=\dfrac{1-\tan^{2}\alpha-2\tan\alpha}{1+\tan^{2}\alpha}=\dfrac{1-9-2\times 3}{1+9}=-\dfrac{7}{5}$.

14.【答案】$\dfrac{8+4\sqrt{3}}{3}$

【解析】函数 $y=a^{x-2}+3(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象恒过定点 $A(2,4)$，则 $2m+4n=2$，∴$m+2n=1$，

$\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{3n}=\left(\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{3n}\right)(m+2n)=2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4n}{m}+\dfrac{m}{3n}\geqslant\dfrac{8}{3}+2\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{8+4\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{4n}{m}=\dfrac{m}{3n},\\ m+2n=1,\end{cases}$ 即 $m=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2}$，$n=\dfrac{1}{2\sqrt{3}+2}$ 时等号成立.

15.【答案】540

【解析】6 名志愿者被安排三项工作，每项工作至少安排 1 人，则分组方式为 1,2,3;1,1,4;2,2,2，则安排方案有 $\left(C_{6}^{1}C_{5}^{2}C_{3}^{3}+\dfrac{C_{6}^{1}C_{5}^{1}C_{4}^{4}}{2!}+\dfrac{C_{6}^{2}C_{4}^{2}C_{2}^{2}}{3!}\right)A_{3}^{3}=(60+15+15)\times 6=540$（种）.

16.【答案】$\dfrac{\sqrt{14-4\sqrt{2}}}{2}$

【解析】连接 $DP$，则 $|DP|=\sqrt{|D_{1}P|^{2}-|DD_{1}|^{2}}=\sqrt{5-4}=1$，所以点 $P$ 在正方形 $ABCD$ 内运动轨迹为以 $D$ 为圆心，1 为半径的四分之一圆弧，连接 $B_{1}P$，则 $|B_{1}P|^{2}=|BP|^{2}+|BB_{1}|^{2}=|BP|^{2}+4$，所以 $|B_{1}P|$ 取得最小值时，只需 $|BP|$ 取得最小值即可，连接 $BD$ 交圆弧于 $P$ 点，此时 $|BP|$ 取得最小值，则 $|B_{1}P|$ 取得最小值，连接 $PM$，则 $\triangle DPM$ 为等腰直角三角形，$DP\perp MP$，又 $B_{1}B\perp MP$，所以三棱锥 $B_{1}-MPB$ 为四个面均为直角三角形的三棱锥，则球心为 $B_{1}M$ 的中点，$B_{1}M$ 为直径，则 $|B_{1}M|=\sqrt{|BM|^{2}+|BB_{1}|^{2}}=\sqrt{|CM|^{2}+|CB|^{2}+|BB_{1}|^{2}}=\sqrt{(2-\sqrt{2})^{2}+4+4}=\sqrt{14-4\sqrt{2}}$，所以外接球半径 $R=\dfrac{\sqrt{14-4\sqrt{2}}}{2}$.

17.【解】(1)$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=n$，　①

当 $n\geq 2$ 时，$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=n-1$，　② ………… 2 分

由①－②得 $a_n=2^n$， ………… 3 分

又 $n=1$ 时，$\frac{a_1}{2^1}=1$，$\therefore a_1=2$，满足上式， ………… 4 分

综上，$a_n=2^n$. ………… 5 分

(2)$b_n=\log_2 a_n=n$， ………… 6 分

$\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$， ………… 8 分

设数列$\left\{\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}\right\}$的前 $n$ 项和为 $T_n$，

所以 $T_n=\frac{1}{b_1\cdot b_2}+\frac{1}{b_2\cdot b_3}+\cdots+\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}$

$=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. ………… 10 分

18.【解】$\because \frac{1-\cos 2B}{\cos A}=\frac{\sin 2B}{1+\sin A}$，

$\therefore \frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{2\sin B\cos B}{2\sin^2 B}$，

即$\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{\cos B}{\sin B}$， ………… 1 分

即 $\sin B+\sin A\sin B=\cos A\cos B$，

$\sin B=\cos(A+B)=-\cos C=\sin\left(C-\frac{\pi}{2}\right)$，

$\because B,C\in(0,\pi)$，$\therefore B=C-\frac{\pi}{2}$. ………… 3 分

(1)由正弦定理得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，

$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin C}{\sin\left(C-\frac{\pi}{2}\right)}=-\tan C=\sqrt{3}$， ………… 5 分

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$. ………… 7 分

(2)$C=B+\frac{\pi}{2}$，则$\frac{C}{2}=\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4}=\alpha$，

$S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$，

即$\frac{1}{2}\times 2\times BC\times\sin\alpha+\frac{1}{2}\times 2\times AC\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times BC\times AC\times\sin 2\alpha$， ………… 9 分

所以 $2(BC+AC)\sin\alpha=2BC\cdot AC\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$，

即$\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}=\cos\alpha$， ………… 11 分

即 $\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}$. ………… 12 分

(其他方法正确也可给分)

19.【解】(1)取 $BC$ 的中点为 $O$,$DE$ 的中点为 $O'$,连接 $A'O$ 与 $OO'$,

∵正三角形 $ABC$ 中,$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EC}$,

∴$DE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{3}{4}BC$,$OO'\perp DE$,$OO'\perp BC$,

∵立体图形由翻折可得且 $A'E=AD$,

∴$A'C=A'B$,∵$O$ 是 $BC$ 的中点,

∴$A'O\perp BC$,

平面 $A'BC\perp$平面 $DBC$,平面 $A'BC\cap$平面 $DBC=BC$,$A'O\subset$平面 $A'BC$,

∴$A'O\perp$平面 $DBC$,∴$A'O\perp OO'$,…………………………………………………… 2分

以点 $O$ 为坐标原点建立如图所示空间直角坐标系,

∵正$\triangle ABC$ 的边长为 4,$DE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{3}{4}BC$,

∴$OC=OB=2$,$OO'=\frac{\sqrt{3}}{2}$,连接 $A'O'$,在$\triangle A'OO'$中,$A'O'=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

在$\triangle A'OO'$中,由勾股定理得 $OA'=\sqrt{6}$,

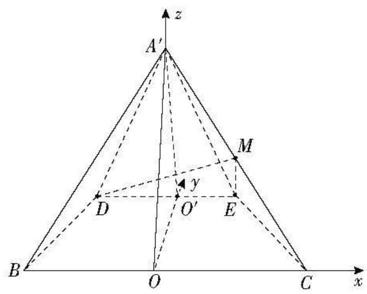
∴$A'(0,0,\sqrt{6})$,$D\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$E\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$M\left(1,0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{A'D}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{6}\right)$,$\overrightarrow{EM}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

∴$\cos\langle\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{EM}\rangle=\frac{\overrightarrow{A'D}\cdot\overrightarrow{EM}}{|\overrightarrow{A'D}|\cdot|\overrightarrow{EM}|}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$,…………………………………………………… 4分

∵异面直线所成角的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

∴异面直线 $A'D$ 与 $EM$ 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$. …………………………………………………… 5分




(2)由(1)得 $A'(0,0,\sqrt{6})$,$B(-2,0,0)$,$C(2,0,0)$,$D\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,

$E\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$M\left(1,0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

∴$\overrightarrow{BC}=(4,0,0)$,$\overrightarrow{BA'}=(2,0,\sqrt{6})$,$\overrightarrow{DE}=(3,0,0)$,$\overrightarrow{DM}=\left(\frac{5}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, …………………………… 6分

易得平面 $A'BC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,…………………………………………………… 8分

设平面 $DEM$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}3x=0,\\\frac{5}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{6}}{2}z=0,\end{cases}$则 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{2},1)$,……………………………………… 10分

$\therefore|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, ………………………… 11 分

$\therefore$平面 $A'BC$ 与平面 $DEM$ 夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………… 12 分

20.【解】(1)$f'(x)=ma^x\ln a+2x-\ln a$,

$\therefore f'(0)=m\ln a-\ln a=(m-1)\ln a=0$,$\therefore m=1$, ………………………… 1 分

又 $f(0)=m+n=1$,$\therefore n=0$, ………………………… 2 分

$\therefore f(x)=a^x+x^2-x\ln a$,

则 $f'(x)=a^x\ln a+2x-\ln a=2x+(a^x-1)\ln a$, ………………………… 3 分

令 $g(x)=2x+(a^x-1)\ln a$,$\therefore g'(x)=2+a^x\ln^2 a>0$,

$\therefore f'(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,又 $f'(0)=0$,

所以不等式 $f'(x)>0$ 的解集为$(0,+\infty)$, ………………………… 4 分

故函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$. ………………………… 5 分

(备注:单调递增区间写成$[0,+\infty)$也得分)

(2)若对任意的 $x_1,x_2\in[-1,1]$,使得$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant e-1$ 恒成立,

只需 $f(x)_{max}-f(x)_{min}\leqslant e-1$, ………………………… 6 分

由(1)知,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,在$(-\infty,0)$上单调递减,

所以当 $x\in[-1,1]$时,$f(x)_{min}=f(0)=1$,

$f(x)_{max}$ 为 $f(1)$,$f(-1)$中的最大值, ………………………… 7 分

$\because f(1)-f(-1)=a-\dfrac{1}{a}-2\ln a$,

令 $h(a)=a-\dfrac{1}{a}-2\ln a$,则 $h'(a)=1+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{a}=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)^2>0$,

$\therefore h(a)=a-\dfrac{1}{a}-2\ln a$ 在 $a\in(1,+\infty)$上是增函数,而 $h(1)=0$,$\therefore a>1$,$h(a)>0$,

即 $f(1)>f(-1)$,$\therefore f(x)_{max}-f(x)_{min}=f(1)-f(0)\leqslant e-1$, ………………………… 9 分

$a-\ln a\leqslant e-1$, ………………………… 10 分

对于 $y=a-\ln a$,则 $y'=1-\dfrac{1}{a}>0(a>1)$,所以函数 $y=a-\ln a$ 在 $a\in(1,+\infty)$上是增函数,

所以 $a\leqslant e$,$a>1$,

$\therefore a$ 的取值范围为$(1,e]$. ………………………… 12 分

21.【解】(1)因为圆 $F_1:(x+c)^2+y^2=4$ 与圆 $F_2:(x-c)^2+y^2=4$ 相交,且交点在椭圆 $E$ 上,

所以 $2a=2+2$,$a=2$, ………………………… 1 分

又 $k_{AA_1}\cdot k_{AA_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$,$\therefore b^2=3$, ………………………… 2 分

所以椭圆 $E$ 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………… 3 分

(2)①由(1)知椭圆右焦点 $F_2(1,0)$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$P(4,t)$,

则切线 $PM$ 的方程为$\dfrac{xx_1}{4}+\dfrac{yy_1}{3}=1$,

即 $3xx_1+4yy_1=12$,点 $P$ 在直线 $PM$ 上,

$\therefore 12x_1+4ty_1=12$,$\therefore 3x_1+ty_1=3$, ………………………… 5 分

$\because k_{MF_2}=\dfrac{y_1}{x_1-1}$,$k_{PF_2}=\dfrac{t}{4-1}=\dfrac{t}{3}$,$\therefore k_{MF_2}k_{PF_2}=\dfrac{y_1}{x_1-1}\cdot\dfrac{t}{3}=\dfrac{ty_1}{3(x_1-1)}$,

$\because 3x_1+ty_1=3$,$\therefore ty_1=3-3x_1=3(1-x_1)$,

代入上式得 $k_{MF_2}k_{PF_2}=\frac{ty_1}{3(x_1-1)}=\frac{3(1-x_1)}{3(x_1-1)}=-1$， …………………………………… 6 分

$\therefore MF_2\perp PF_2$，同理 $NF_2\perp PF_2$，

所以直线 $MN$ 恒过定点 $F_2(1,0)$． …………………………………… 7 分

②由①知直线 $MN$ 恒过定点 $F_2(1,0)$，

令直线 $MN$：$x=my+1$，

代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

得 $y^2(3m^2+4)+6my-9=0$，则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$， …………………………………… 8 分

$\Delta=(6m)^2+36(3m^2+4)>0$ 恒成立，

则 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12(1+m^2)}{3m^2+4}$，

①当 $m\neq0$ 时，

点 $P$ 到直线 $MN$ 的距离为 $|PF_2|=\sqrt{9+t^2}$，$\because PF_2\perp MN$，$\therefore k_{PF_2}\cdot k_{MN}=-1$，$\therefore\frac{t}{3}\cdot\frac{1}{m}=-1$，

$\therefore t=-3m$，$\therefore|PF_2|=\sqrt{9+9m^2}=3\sqrt{1+m^2}$，

$\therefore S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|PF_2||MN|=\frac{18(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}{3m^2+4}$， …………………………………… 9 分

令 $n=\sqrt{1+m^2}>1$，$\therefore m^2=n^2-1$，

则 $S_{\triangle PMN}=\frac{18n^2n}{3n^2+1}=\frac{18n^3}{3n^2+1}=\frac{18}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}$，

$\because y=\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}$ 在 $n\in(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore S_{\triangle PMN}=\frac{18}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}$ 在 $n\in(1,+\infty)$ 上单调递增， …………………………………… 10 分

$\therefore S_{\triangle PMN}>\frac{9}{2}$，

②当 $n=1$ 时，$S_{\triangle PMN}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$． …………………………………… 11 分

综上，$\triangle PMN$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$． …………………………………… 12 分

22.【解】(1)当 $n=2$ 时，$P_1\in(0,1)$，$H(\xi)=-P_1\log_2P_1-(1-P_1)\log_2(1-P_1)$， ………………… 2 分

令 $f(t)=-t\log_2t-(1-t)\log_2(1-t)$，$t\in(0,1)$，

则 $f'(t)=-\log_2t+\log_2(1-t)=\log_2\left(\frac{1}{t}-1\right)$，

所以函数 $f(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减， …………………………………… 4 分

所以当 $P_1=\frac{1}{2}$ 时，$H(\xi)$ 取得最大时，最大值为 $H(\xi)_{\max}=1$． …………………………………… 5 分

(2)$P_1=P_2=\frac{1}{2^{n-1}}$，$P_{k+1}=2P_k(k=2,3,\cdots,n)$，

则 $P_k=P_2\times2^{k-2}=\frac{2^{k-2}}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-k+1}}$，$(k=2,3,\cdots,n)$，

$P_k \log_2 P_k = \frac{1}{2^{n-k+1}} \log_2 \frac{1}{2^{n-k+1}} = -\frac{n-k+1}{2^{n-k+1}}$，………………………………………… 6 分

而 $P_1 \log_2 P_1 = \frac{1}{2^{n-1}} \log_2 \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{n-1}{2^{n-1}}$，

于是 $H(\xi) = \frac{n-1}{2^{n-1}} + \sum_{k=2}^{n} P_k \log_2 P_k = \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n-2}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{2}{2^2} + \frac{1}{2}$

$= \frac{n-1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} + \frac{n}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n-2}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{2}{2^2} + \frac{1}{2}$，………………………………………… 8 分

令 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$，

则 $\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$，

两式相减得 $\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$，

因此 $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$，………………………………………… 10 分

$H(\xi) = \frac{n-1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} + S_n = \frac{n-1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} + 2 - \frac{n+2}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-2}}$. ………………………………………… 12 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。