

2025 届普通高等学校招生全国统一考试  
高二联考  
数学(人教版)

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $a = (-2, -1, 1)$ ,  $b = (-1, -2, -2)$ , 则  $a \cdot b =$  ( )  
A. 0                      B. 2                      C. -2                      D. -3
2. 若经过  $A(2, a)$ ,  $B(-a, 2a-1)$  两点的直线斜率为 1, 则实数  $a =$  ( )  
A.  $-\frac{1}{2}$                       B. 3                      C. 2                      D. 1
3. 在空间直角坐标系  $O-xyz$  中, 点  $M(4, 5, 3)$  关于平面  $xOy$  的对称点为  $N$ , 则  $|MN| =$  ( )  
A. 6                      B. 5                      C. 4                      D. 3
4. 已知数列  $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$  是首项为 3, 公差为 1 的等差数列, 则  $a_{2024} =$  ( )  
A.  $\frac{2025}{2026}$                       B.  $\frac{1012}{1013}$   
C.  $\frac{2025}{2024}$                       D.  $\frac{1011}{1013}$
5. 已知圆  $C$  的方程为  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ , 过点  $A(1, 2)$  作圆  $C$  的切线, 则切线的斜率为 ( )  
A.  $\sqrt{3}$                       B.  $\sqrt{2}$   
C.  $\pm\sqrt{3}$                       D.  $\pm 1$
6. 已知自然界中存在某种昆虫, 其在幼虫期到成虫期这个时间段内会伴随着蜕皮和生长的交替, 该种昆虫最开始的身体长度记为  $a_1$ , 其在发育过程中先蜕皮, 身体总长度减少  $\frac{1}{3}$ , 此时昆虫的长度记为  $a_2$ ; 蜕皮之后, 迅速生长, 当身体总长度增加了蜕皮后那一时刻的  $\frac{1}{3}$ , 此时昆虫的长度记为  $a_3$ , 然后进入下一次蜕皮, 以此类推. 若  $a_4 = 12$ , 则  $a_1 =$  ( )  
A. 18                      B.  $\frac{27}{2}$                       C.  $\frac{81}{4}$                       D.  $\frac{243}{16}$

数学(人教版)试题 第 1 页(共 4 页)

考生号

班级

姓名

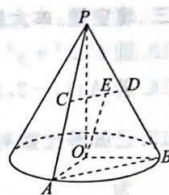
7. 如图, 在圆锥  $PO$  中, 点  $A, B$  在底面圆周上, 点  $C, D$  分别是母线  $PA, PB$  的中点,  $\vec{CE} = 2\vec{ED}$ , 记  $\vec{OA} = \mathbf{a}, \vec{OB} = \mathbf{b}, \vec{OP} = \mathbf{c}$ , 则  $\vec{OE} =$  ( )

A.  $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$

B.  $\frac{1}{6}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$

C.  $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} + \mathbf{c}$

D.  $\frac{1}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$



8. 已知点  $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  在椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上, 且  $\sqrt{a^2 + b^2} > 2\sqrt{a^2 - b^2}$ , 则  $a$  的取值范围为 ( )

A.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

B.  $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

D.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, (a_n a_{n+1} - 1)(2a_{n+1} - a_n) = 0$ , 则  $a_{1314}$  的值可能为 ( )

A. 1

B.  $1314$

C.  $2^{-1313}$

D.  $2^{-521}$

10. 已知圆  $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ , 直线  $l: (3m+1)x + (m+1)y - 12m - 6 = 0$ , 则 ( )

A.  $l$  恒过定点  $(1, -2)$

B. 圆心  $C$  位于第二象限

C.  $l$  与圆  $C$  恒有两个交点

D.  $l$  被圆  $C$  截得的最短弦长为  $4\sqrt{2}$

11. 已知方程  $\frac{x^2}{\sin \alpha} + \frac{y^2}{\cos 2\alpha} = 1$  表示的曲线为  $C$ , 则 ( )

A. 当  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  时, 曲线  $C$  表示圆心在原点, 半径为  $\frac{1}{2}$  的圆

B. 当  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  时, 曲线  $C$  表示双曲线

C. 当  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  时, 曲线  $C$  表示焦点在  $x$  轴上的椭圆

D. 曲线  $C$  可能为等轴双曲线

12. 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $\vec{BP} = \frac{1}{2}\vec{BC}, \vec{CQ} = \frac{1}{2}\vec{CC_1}$ , 点  $M$  为棱  $AB$  上一动点(可与端点重合), 则 ( )

A. 当点  $M$  与点  $A$  重合时,  $M, P, Q, D_1$  四点共面且  $S_{MPQD_1} = 4$

B. 当点  $M$  与点  $B$  重合时,  $\cos\langle \vec{D_1M}, \vec{PQ} \rangle = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. 当点  $M$  为棱  $AB$  的中点时,  $A_1M \perp$  平面  $MPQ$

D. 直线  $CD$  与平面  $MPQ$  所成角的正弦值存在最小值  $\frac{1}{3}$

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 圆  $C: x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$  的面积为\_\_\_\_\_.
14. 若  $A(1, -2, 3), B(0, -1, 1), C(3, 1, -1)$ , 则  $\overrightarrow{BA}$  在  $\overrightarrow{BC}$  上的投影向量的模为\_\_\_\_\_.
15. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $-\frac{1}{3}$ ,  $a_1 = 2$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_n$  的最大值与最小值之和为\_\_\_\_\_.
16. 已知直线  $l: y = kx - 2 (k \in \mathbf{R})$  交  $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$  于  $M, N$  两点, 直线  $y = 1$  交  $C$  的右支于点  $A$  (异于点  $M, N$ ), 且  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ , 则  $l$  在  $x$  轴上的截距为\_\_\_\_\_.

四、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知点  $A(-2, 9), B(6, -7), C(1, 1)$ .

- (1) 求点  $C$  到直线  $AB$  的距离;
- (2) 若直线  $BC$  与直线  $l: (a+1)x + y - 3 = 0$  相互垂直, 求实数  $a$  的值.

18. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 且  $(n+2)a_n = 2(n+1)a_{n+1}, a_2 = \frac{3}{4}, n \in \mathbf{N}^*$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 求  $T_n$ .

19. (12 分)

在以  $O$  为坐标原点的平面直角坐标系中, 抛物线  $C: y^2 = 4x$ , 不过焦点的直线  $l$  与抛物线  $C$  交于  $A, B$  两点,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -3$ .

- (1) 求  $C$  的焦点坐标和准线方程;
- (2) 证明: 直线  $l$  过定点.



20. (12分)

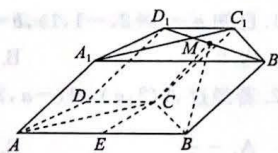
已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} - 2a_n = 1, a_1 = 1, b_n = \frac{n(n+1)}{a_{n+1}+1}, n \in \mathbb{N}^*$ .

- (1) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 探究数列  $\{b_n\}$  是否存在最大项, 并说明理由.

21. (12分)

如图, 已知斜四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ , 底面  $ABCD$  为等腰梯形,  $E$  为线段  $AB$  的中点, 四边形  $AECD$  为菱形, 点  $A_1$  到底面  $ABCD$  的距离为  $\frac{1}{2}$ , 且  $AB = 2AA_1 = 2, \vec{BC} \cdot \vec{CC}_1 = 0, M$  为线段  $B_1D_1$  的中点.

- (1) 证明:  $BC \perp$  平面  $A_1ACC_1$ ;
- (2) 求二面角  $M - BC - D$  的平面角的余弦值.



22. (12分)

已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  与椭圆  $C_2: \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 1$  有相同的离心率, 且  $A(0, 2)$  为  $C_1$  的上顶点.

- (1) 求  $C_1$  的标准方程;
- (2) 设斜率存在且经过原点的直线  $l$  交  $C_2$  于  $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$  两点, 直线  $AP, AQ$  与  $C_1$  异于点  $A$  的另一交点分别为点  $M, N$ , 求  $\frac{|AM| \cdot |AN|}{|AP| \cdot |AQ|}$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

