高三期末调研数学试题参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	D	A	D	C	A	B

二、选择题

9	10	11	12
ACD	AB	ABD	ABD

三、填空题

13.$\frac{5\pi}{6}$（或写为 150°）　　14.$\frac{4}{5}$　　15.13　　16.$-\frac{3}{2}\ln 3$

四、解答题

17.【解】（1）由$\sqrt{3}c\cos A+a\sin C=\sqrt{3}b$及正弦定理，

可得$\sqrt{3}\sin C\cos A+\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin B$.

因为$\sin B=\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以$\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin A\cos C$.

又$\sin A>0$，所以$\sin C=\sqrt{3}\cos C$，则$\tan C=\sqrt{3}$，

又$C\in\left(0,\pi\right)$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

（2）$\because CD$为$\angle ACB$的平分线，$AD=2DB$，

设点D到BC和AC的距离为d，则$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot d}{\frac{1}{2}AC\cdot d}=\frac{BD}{AD}$，

即$\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}$，$\therefore b=2a$，又$\because S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times 4\times b\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times 4\times a\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\frac{\pi}{3}$，则有$3a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$，

$\therefore a=2\sqrt{3}$或$a=0$（舍去），所以$a=2\sqrt{3}$.

（2）方法 2：$\because CD$为$\angle ACB$的平分线，$AD=2DB$，由内角平分线性质定理，$b=2a$，

又$\because C=\frac{\pi}{3}$由余弦定理$AB^2=\sqrt{3}a$，$\therefore B=\frac{\pi}{2}$，

又$\because AD=2DB$，$\therefore BD=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，又$\because CD=4$，

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中，$a^2+\dfrac{a^2}{3}=16$，∴ $a=2\sqrt{3}$.

18.【解】（1）方法 1：由已知得三棱锥 $A-BCD$ 为正四面体，棱长为 $2\sqrt{3}$，

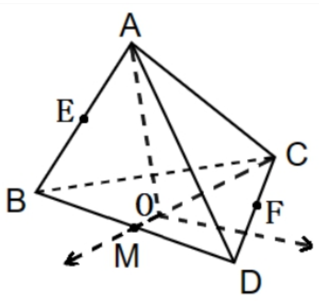
又∵ E，M，F 分别为 AB，BD，CD 中点

∴ $EM=MF=\sqrt{3}$

又∵ $AF=BF=3$，∴ $EF=\sqrt{6}$

∵ $EM^2+MF^2=EF^2$，∴ $EM\perp MF$，∴ $\angle EMF=90°$

方法 2：取 BC 中点 N，连接 DN



∵ $AN\perp BC$，$DN\perp BC$，$AN\cap DN=N$

∴ $BC\perp$ 平面 AND，∴ $BC\perp AD$

又∵ $EM//AD$，$MF//BC$

∴ $EM\perp MF$，∴ $\angle EMF=90°$

方法 3：∵ M 为 BD 中点，∴ $AM\perp BD$，$CM\perp BD$，∴ $BD\perp$ 平面 AMC，

∴平面 $AMC\perp$ 平面 BCD，平面 $AMC\cap$ 平面 $BCD=CM$，

∴过 A 作 $AO\perp CM$，则 $AO\perp$ 平面 BCD，

以 O 为坐标原点，OM 所在直线为 x 轴，过 O 作 CD 垂线为 y 轴，OA 所在直线为 z 轴，

建立空间直角坐标系.

$B\left(1,-\sqrt{3},0\right)$，$D\left(1,\sqrt{3},0\right)$，$C\left(-2,0,0\right)$，$A\left(0,0,2\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{EM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(1,-\sqrt{3},-2\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{MF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(-3,\sqrt{3},0\right)$

$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{MF}=\dfrac{1}{4}(-3+3)=0$，∴ $EM\perp MF$，∴ $\angle EMF=90°$

（2）∵ M 为BD中点，∴ $AM\perp BD$，$CM\perp BD$，

∴ $BD\perp$ 平面 AMC，∴平面 $AMC\perp$ 平面 BCD，平面 $AMC\cap$ 平面 $BCD=CM$，

∴过 A 作 $AO\perp CM$，则 $AO\perp$ 平面 BCD，以 O 为坐标原点，OM 所在直线为 x 轴，

过 O 作 CD 垂线为 y 轴，OA 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系.

$B\left(1,-\sqrt{3},0\right)$，$D\left(1,\sqrt{3},0\right)$，$C\left(-2,0,0\right)$，$A\left(0,0,2\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(1,-\sqrt{3},-2\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(-3,\sqrt{3},0\right)$

设平面 EMF 法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MF}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y-2\sqrt{2}z=0\\ -3x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=\sqrt{3}$，$z=\sqrt{2}$，$\therefore\vec{n}=\left(1,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{AC}=\left(-2,0,-2\sqrt{2}\right)$，$\therefore\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AC}\right\rangle\right|=\frac{|-2-4|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ AC 与平面 EMF 所成角为 45°

19.【解】（1）方法 1：$a_1a_2\cdots a_na_{n+1}=a_{n+1}^{\frac{n+2}{2}}$，$a_1a_2\cdots a_n=a_n^{\frac{n+1}{2}}$，

相除得 $a_{n+1}^2=\frac{a_{n+1}^{n+2}}{a_n^{n+1}}$，即 $a_{n+1}^n=a_n^{n+1}$

所以 $\lg a_{n+1}^n=\lg a_n^{n+1}$，即 $n\lg a_{n+1}=\left(n+1\right)\lg a_n$，

所以 $\frac{\lg a_{n+1}}{n+1}=\frac{\lg a_n}{n}$，所以 $\frac{\lg a_2}{2}=\frac{\lg a_1}{1}=\lg 3$

结合 $\frac{\lg a_{n+1}}{n+1}=\frac{\lg a_n}{n}$，所以 $\frac{\lg a_n}{n}=\frac{\lg a_1}{1}=\lg 3$，即数列 $\left\{\frac{\lg a_n}{n}\right\}$ 是常数列

所以 $\lg a_n=n\lg 3=\lg 3^n$，所以 $a_n=3^n$

（1）方法 2：$\because$ $a_1a_2\cdots a_n=a_n^{\frac{n+1}{2}}$，

两边取对数得，$\lg a_1+\lg a_2+\lg a_3+\cdots\cdots\lg a_n=\frac{n+1}{2}\lg a_n$①

$\therefore$ $\lg a_1+\lg a_2+\lg a_3+\cdots\cdots\lg a_{n-1}=\frac{n}{2}\lg a_{n-1}$②

①－②得. $\lg a_n=\frac{n+1}{2}\lg a_n-\frac{n}{2}\lg a_{n-1}$，即 $\frac{n}{2}\lg a_{n-1}=\frac{n-1}{2}\lg a_n$，

$\therefore$ $\frac{\lg a_n}{n}=\frac{\lg a_{n-1}}{n-1}$.所以 $\frac{\lg a_n}{n}=\frac{\lg a_1}{1}=\lg 3$，即数列 $\left\{\frac{\lg a_n}{n}\right\}$ 是常数列，

所以 $\lg a_n=n\lg 3=\lg 3^n$，所以 $a_n=3^n$

（2）$b_n=\dfrac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}=\dfrac{3^n}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^n-1}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1}\right)$

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^1-1}-\dfrac{1}{3^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}-\dfrac{1}{3^3-1}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{3^n-1}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1}\right)$

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^1-1}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1}\right)<\dfrac{1}{4}$

又因为$S_n=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^{n+1}-1}\right)$单调递增，所以$S_n\geq S_1=\dfrac{3}{16}$，

即$\dfrac{3}{16}\leq S_n<\dfrac{1}{4}$

20.【解】（1）$S_{\triangle EFH}=\dfrac{1}{2}|EF|x_H=\dfrac{1}{2}p\cdot\dfrac{p}{2}=1$，所以$p=2$

即抛物线方程为C：$x^2=4y$，$H(1,-2)$

方法 1：C：$y=\dfrac{x^2}{4}$，$y'=\dfrac{x}{2}$，

设切点$\left(x_0,\dfrac{{x_0}^2}{4}\right)$，切线斜率为$\dfrac{x_0}{2}$

切线方程为$y-\dfrac{{x_0}^2}{4}=\dfrac{1}{2}x_0(x-x_0)$，此切线过$H(1,-2)$

解得$x_0=-2$，或$x_0=4$，得两切点坐标$M(-2,1)$，$N(4,4)$.

所以直线MN方程为$x-2y+4=0$

方法 2：设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，在抛物线上，所以$x_1^2=4y_1$，$x_2^2=4y_2$，

切线方程分别为：$\begin{cases}y-y_1=\dfrac{1}{2}x_1(x-x_1)\\ y-y_2=\dfrac{1}{2}x_2(x-x_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xx_1=2(y+y_1)\\ xx_2=2(y+y_2)\end{cases}$

又因为两切线相交于$H(1,-2)$ $\begin{cases}x_1=2(y_1-2)\\ x_2=2(y_2-2)\end{cases}$，即$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$均在直线$x=2(y-2)$上，

即$x-2y+4=0$.

（2）方法 1：设切点$B(x_B,y_B)$，（$-2<x_B<4$）

可得过 B 点切线为：$y-\frac{x_B{}^2}{4}=\frac{1}{2}x_B\left(x-x_B\right)$ 化简得 $y=\frac{1}{2}x_Bx-\frac{x_B{}^2}{4}$

由第一问方法知 $M\left(-2,1\right)$，$H\left(1,-2\right)$ 点，可得直线 HM 方程为 $y=-x-1$

联立解得 C 点横坐标 $x_C=\frac{1}{2}x_B-1$

同理由 N，H 坐标可得直线 HN 方程 $y=2x-4$，可得 D 点横坐标 $x_D=\frac{1}{2}x_B+2$

$\frac{|MC|}{|CH|}=\frac{x_C+2}{1-x_C}=\frac{\frac{1}{2}x_B+1}{2-\frac{1}{2}x_B}$，$\frac{|HD|}{|DN|}=\frac{x_D-1}{4-x_D}=\frac{\frac{1}{2}x_B+1}{2-\frac{1}{2}x_B}$ 结论得证

方法 2：$\begin{cases}xx_1=2\left(y+y_1\right)\\xx_2=2\left(y+y_2\right)\end{cases}$ 相减：$x_H=\frac{x_1+x_2}{2}$

$B\left(x_3,y_3\right)$，过 B 的切线 $y-y_3=\frac{1}{2}x_3\left(x-x_3\right)$，交 HM $y-y_1=\frac{1}{2}x_1\left(x-x_1\right)$

得 $x_C=\frac{x_1+x_3}{2}$，同理 $x_D=\frac{x_2+x_3}{2}$，

$$\frac{|MC|}{|CH|}=\frac{|x_1-x_C|}{|x_H-x_C|}=\frac{\left|x_1-\frac{x_1+x_3}{2}\right|}{\left|\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1+x_3}{2}\right|}=\frac{|x_1-x_3|}{|x_2-x_3|},$$

$$\frac{|DH|}{|ND|}=\frac{|x_H-x_D|}{|x_2-x_D|}=\frac{\left|\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_2+x_3}{2}\right|}{\left|x_2-\frac{x_2+x_3}{2}\right|}=\frac{|x_1-x_3|}{|x_2-x_3|}$$

所以 $\frac{|MC|}{|CH|}=\frac{|HD|}{|DN|}$

21.【解】（1）解：由题意得每轮游戏爬一步台阶的概率为 $\frac{2}{3}$，爬两步台阶的概率为 $\frac{1}{3}$

所以随机变量 X 可能取值为 4，5，6，7，8

可得 $P\left(X=4\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$，$P\left(X=5\right)=C_4^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$

$P\left(X=6\right)=C_4^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$，$P\left(X=7\right)=C_4^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$

$P\left(X=8\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

所以 X 的分布列：

X	4	5	6	7	8
P	$\dfrac{16}{81}$	$\dfrac{32}{81}$	$\dfrac{24}{81}$	$\dfrac{8}{81}$	$\dfrac{1}{81}$

（2）解：（ⅰ）证明：$n=1$，即爬一步台阶，是第 1 次掷骰子，

向上点数不是 3 的倍数概率 $p_1=\dfrac{2}{3}$，则 $p_1-p_0=-\dfrac{1}{3}$

到达第 n 步台阶有两种情况：

①前一轮爬到第 $n-2$ 步台阶，又掷骰子是 3 的倍数得爬两步台阶，其概率为 $\dfrac{1}{3}p_{n-2}$

②前一轮爬到第 $n-1$ 步台阶，又掷骰子不是 3 的倍数爬一步台阶，其概率为 $\dfrac{2}{3}p_{n-1}$

所以 $p_n=\dfrac{1}{3}p_{n-2}+\dfrac{2}{3}p_{n-1}$（$n=2,3,\cdots,7$）

所以 $p_n-p_{n-1}=-\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}-p_{n-2}\right)$（$n=2,3,\cdots,7$）

所以数列 $\left\{p_n-p_{n-1}\right\}$（$n=1,2,\cdots,7$）是首项为 $-\dfrac{1}{3}$，公比为 $-\dfrac{1}{3}$ 的等比数列.

（此题也可用概率知识分别求出 p_1，p_2，……，p_7 具体值，再一一验证也可.）

（ⅱ）因为数列 $\left\{p_n-p_{n-1}\right\}$ 是首项为 $-\dfrac{1}{3}$，公比为 $-\dfrac{1}{3}$ 的等比数列，

所以 $p_n-p_{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$，所以 $p_1-p_0=-\dfrac{1}{3}$，$p_2-p_1=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2$，…，$p_n-p_{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

各式相加，得：$p_n-p_0=-\dfrac{1}{4}\left[1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$

所以 $p_n=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$（$n=1,2,\cdots,7$）

所以活动参与者得到纪念品的概率为

$$p_8=\frac{1}{3}p_6=\frac{1}{3}\times\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{547}{2187}.$$

22.【解】$f'(x)\geq 0$ 得 $e^x-ax\geq 0$（$x>0$），即 $a\leq\dfrac{e^x}{x}$（$x>0$）

设 $h(x)=\dfrac{e^x}{x}$（$x>0$），则 $h'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增

所以 $h(x)\ge h(1)=\mathrm{e}$，

所以 $a\le \mathrm{e}$，此时 $f'(x)\ge 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

故 a 的取值范围是 $(-\infty,\mathrm{e}]$.

（2）因为 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，即方程 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=a$ 有两个不同的实数根 x_1，x_2

则 $\mathrm{e}^{x_1}=ax_1$，$\mathrm{e}^{x_2}=ax_2$，$x_1<x_2$ 令 $x_2-x_1=t$（$t>0$），即 $x_2=x_1+t$

$\mathrm{e}^{x_1+t}=a(x_1+t)$ 联立 $\mathrm{e}^{x_1}=ax_1$ 得 $\mathrm{e}^t=1+\dfrac{t}{x_1}$

解得 $x_1=\dfrac{t}{\mathrm{e}^t-1}$，$x_2=\dfrac{t}{\mathrm{e}^t-1}+t$

要证 $x_1+\lambda x_2>\lambda+1$ 即证 $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t-1}+\lambda\left(\dfrac{t}{\mathrm{e}^t-1}+t\right)>\lambda+1$

即 $(\lambda t-\lambda-1)\mathrm{e}^t+\lambda+t+1>0$

即 $\dfrac{(\lambda t-\lambda-1)\mathrm{e}^t}{\lambda+t+1}>-1$（*）

令 $g(t)=\dfrac{(\lambda t-\lambda-1)\mathrm{e}^t}{\lambda+t+1}$，$t>0$

求导化简可得 $g'(t)=\mathrm{e}^t\dfrac{\lambda t^2+(\lambda^2-1)t}{(\lambda+t+1)^2}=\mathrm{e}^t\dfrac{\lambda t\left[t+\left(\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\right)\right]}{(\lambda+t+1)^2}$

由 $\lambda>1$，可知 $\lambda-\dfrac{1}{\lambda}>0$，即 $g'(t)>0$，所以函数 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增.

得到 $g(t)>g(0)=-1$，即（*）式成立，所以原不等式成立.