2024年普通高等学校招生全国统一考试

高三第一次联合诊断检测　数学参考答案

一、单选题

1～8　BAADCACD

8题解析　易：$f(x)$ 是增函数，$f(ax^2-4x)+f(2x)=f[(ax^2-4x)+2x]+2=f(ax^2-2x)+2=1$，所以

$f(ax^2-2x)=-1$，令 $x=y=0$，得 $f(0)=2$；令 $x=1$，$y=-1$，得 $f(-1)=0$　令 $x=-1$，$y=-1$，

得 $f(-2)=-2$　令 $x=-2$，$y=-1$，得 $f(-3)=-4$　令 $x=y=-\frac{3}{2}$，得 $f(-\frac{3}{2})=-1$，所以

$ax^2-2x=-\frac{3}{2}$，原问题即 $2a=\frac{4x-3}{x^2}$ 在 $[1,2]$ 有解，令 $t=\frac{1}{x}$，则 $2a=-3t^2+4t$ 在 $t\in[\frac{1}{2},1]$ 时有

解，从而 $2a\in[1,\frac{4}{3}]$，$a\in[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$

二、多选题

9．BCD　　10．BC　　11．BC　　12．ABD

12题解析：由 $a^2+b^2+ab=a+b$，得 $(a+b)^2-(a+b)=ab$　因为 a，b 是正数，所以 $ab>0$，从而

$(a+b)^2-(a+b)>0$，解得 $a+b>1$，因为 $a\neq b$，所以 $ab<\frac{(a+b)^2}{4}$，

从而 $(a+b)^2-(a+b)<\frac{(a+b)^2}{4}$，解得 $a+b<\frac{4}{3}$，因为 $1<a+b<\frac{4}{3}$，

所以 $ab=(a+b)^2-(a+b)\in(0,\frac{4}{9})$，从而 $ab<\frac{1}{2}$　故选ABD.

三、填空题

13．$\frac{1}{2}$　　14．$(1,3)$　　15．-4　　16．$\frac{\sqrt{2}}{6}$

16题解析　设双曲线的焦距为 $2c$，设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $|MN|=|MF_2|+|NF_2|=\frac{c}{a}(x_1+x_2)-2a$

$=\sqrt{2}(x_1+x_2)-2a$　由题意　直线 MN 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-c)$　代入 $x^2-y^2=a^2$ 得

$2x^2-6\sqrt{2}ax+7a^2=0$，所以 $x_1+x_2=3\sqrt{2}a$　从而 $|MN|=4a$，$\triangle MNF_1$ 的周长为

$|MF_1|+|NF_1|+|MN|=4a+2|MN|=12a$，由题意，$a=\frac{\quad}{12}$，所以焦距 $2c=2\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{2}}{\quad}$

四、解答题

17.（10分）

解：（1）设$\{a_n\}$的公差为d，由题意，得$a_1+4d=1$，$2a_1+16d=-2$

所以$a_1=3$，$d=-\frac{1}{2}$，故$a_n=3-\frac{1}{2}(n-1)=\frac{7-n}{2}$ ……5分

（2）由题意，$[a_1]=3$，$[a_2]=[a_3]=2$，$[a_4]=[a_5]=1$，… $[a_{10}]=[a_{11}]=-2$

$$T_{11}=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\cdots+b_{10}+b_{11}=2^3+2(2^2+2+\cdots+2^{-2})=23\frac{1}{2}$$

所以$[T_{11}]=23$ ……10分

18.（12分）

解：（1）零假设H_0：对“腊八节”民俗的了解程度与年龄相互独立.

由题意，得$\chi^2=\frac{100(16\times44-16\times24)^2}{40\times60\times32\times68}=\frac{100}{51}<2.706$.

根据小概率值$\alpha=0.1$的独立性检验，没有充分证据推断H_0不成立，

即认为对“腊八节”民俗的了解程度没有年龄差异 ……5分

（2）设选择题部分和填空题部分答对题数分别为X和Y

因为X服从$B(5,0.8)$，所以$EX=5\times0.8=4$.

由题意，Y的可能取值为1，2，3

$$P(Y=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10},\quad P(Y=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5},\quad P(Y=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

所以$EY=\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=1.8$

该受调者答对题目数量的期望为$E(X+Y)=EX+EY=4+1.8=5.8$个 ……12分

19.（12分）

解：（1）由题意，$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{\cos A}=\frac{1}{2}ab\sin C$.

因为$a\neq0$，$\sin C\neq0$，所以$a\sin B=\frac{1}{2}b\cos A$

由正弦定理，得$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\sin B\cos A$.

因为$\sin B\neq0$，所以$\sin A=\frac{1}{2}\cos A$，故$\tan A=\frac{1}{2}$ ……5分

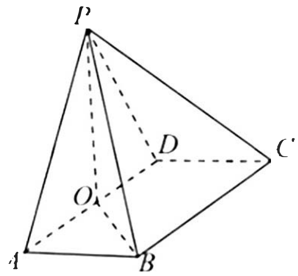
（2）由（1）得$\sin A=\frac{\sqrt5}{5}$，$\cos A=\frac{2\sqrt5}{5}$，所以$\cos(B+C)=-\cos A=-\frac{2\sqrt5}{5}$.

由$\cos(B+C)=\cos B\cos C-\sin B\sin C$，及$\cos B\cos C=-\frac{\sqrt5}{5}$，得$\sin B\sin C=\frac{\sqrt5}{5}$

由正弦定理，得 $\dfrac{bc}{\sin B\sin C}=\dfrac{a^2}{\sin^2 A}$，所以 $bc=\sqrt{5}$．

由余弦定理，得 $b^2+c^2=a^2+2bc\cos A=5$． ……12分

20．（12分）



解：取 AD 中点 O，连接 OB，OP

（1）$\triangle PAD$ 中，因为 $PA=PD$，所以 $OP\perp AD$

$\triangle AOB$ 中，因为 $AB=\sqrt{2}$，$AO=\dfrac{1}{2}BC=1$，$\angle BAD=45^\circ$，

由余弦定理，得 $OB=1$，所以 $OB^2+AO^2=AB^2$，$OB\perp AD$

因为 OP，OB 是平面 BOP 上的两条相交直线，所以 $AD\perp$ 平面 BOP

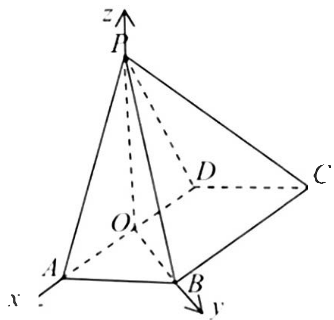
因为 $PB\subset$ 平面 BOP，所以 $AD\perp PB$

因为 $AD\,//\,BC$，所以 $PB\perp BC$ ……5分

（2）由（1）知，$PB\perp BC$，所以 $PB^2=PC^2-BC^2$，则 $PB=3$，

又 $PO=2\sqrt{2}$，$PO^2+OB^2=9=PB^2$，所以 $PO\perp OB$，则 $PO\perp$ 面 $ABCD$，

如图，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-2,1,0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,2\sqrt{2})$

则 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(0,1,-2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ y-2\sqrt{2}z=0.\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},1)$

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x=0,\\ y-2\sqrt{2}z=0.\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(0,-2\sqrt{2},-1)$

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-9}{\sqrt{17}\times 3}=-\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$．

所以，二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$ ……12分

21．（12分）

解：因为点 $A(2,2)$ 在抛物线 E：$x^2=2py$ 上，所以 $p=1$

E 的方程为：$x^2=2y$

（1）设 $B(x_1,\frac{x_1^2}{2})$，$C(x_2,\frac{x_2^2}{2})$，$x_1\neq 2$，$x_2\neq 2$ 且 $x_1\neq x_2$

由题意，$\dfrac{\frac{x_1^2}{2}-2}{x_1-2}+\dfrac{\frac{x_2^2}{2}-2}{x_2-2}=0$ 化简得 $x_1+x_2=-4$

所以，直线 BC 的斜率为 $\dfrac{\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-2$． ……5分

（2）由（1），设直线 BC 的方程为 $y=-2x+m$，代入 $x^2=2y$，

消去 y 得 $x^2+4x-2m=0$，则 $\Delta=16+8m>0$，$x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=-2m$．

因为直线 BC 被圆 M 截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$，所以 $\frac{(2-m)^2}{5}=r^2-(\frac{\sqrt{30}}{5})^2$，

化简得：$(m-2)^2=5r^2-6$ ①，由 $0<r<\sqrt{3}$，则 $-1<m<5$

直线 AB 的方程为 $y-2=\frac{x_1+2}{2}(x-2)$，即 $(x_1+2)x-2y-2x_1=0$．

因为直线 AB 与圆 M 相切，所以 $\dfrac{|-4-2x_1|}{\sqrt{(x_1+2)^2+4}}=r$，化简得 $(x_1+2)^2=\dfrac{4r^2}{4-r^2}$．

同理，$(x_2+2)^2=\dfrac{4r^2}{4-r^2}$

x_1,x_2 是方程 $x^2+4x+4-\dfrac{4r^2}{4-r^2}=0$ 的两根，所以 $x_1x_2=4-\dfrac{4r^2}{4-r^2}$．

故 $-2m=4-\dfrac{4r^2}{4-r^2}$ ②．

由①②解得 $m=0$（$m=\pm\sqrt{26}$ 舍），则 $r=\sqrt{2}$． ……12分

22．（12分）

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-\ln x$，$x>0$．

因为 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(\frac{1}{2})<0$，$f'(1)>0$．

所以，存在 $x_0 \in (\frac{1}{2},1)$，使得当 $x \in (0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x \in (x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$

且 $f'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$

故 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 存在唯一的极小值点 x_0

因为 $f(x_0)-2=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2=\frac{(x_0-1)^2}{x_0}>0$，所以 $f(x_0)>2$ ……5分

（2）令 $e^x+(1-a)x-\ln ax=0$，得 $e^x+x=ax+\ln ax$，设 $g(x)=e^x+x$，

因为 $g'(x)=e^x+1>0$，所以 $g(x)$ 在定义域上单调递增，

而 $ax+\ln ax=e^{\ln ax}+\ln ax$，则有 $g(x)=g(\ln(ax))$

由题意，x_1 为 $x=\ln ax$ 的两个根中较小的根，即 $e^{x_1}=ax_1$，$x_1>0$

又由题意，有 $ax_1=\ln(1+s)-\cos s+2$，从而 $e^{x_1}=\ln(1+s)-\cos s+2$，

则有 $\ln(1+s)-\cos s+1>0$

设 $\varphi(s)=\ln(1+s)-\cos s+1$，$s>-1$，

当 $s>0$ 时，$\ln(1+s)>0$，$-1\le -\cos s\le 1$，所以 $\varphi(s)>0$ 符合题意，

当 $-1<s\le 0$ 时，$\varphi'(s)=\frac{1}{1+s}+\sin s>0$，

所以 $\varphi(s)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递增，$\varphi(s)<\varphi(0)=0$，不合题意

所以 $s>0$

设 $m(x)=e^x-\ln(1+x)+\cos x-2$，则 $m'(x)=e^x-\frac{1}{1+x}-\sin x$，

因为 $x>0$，令 $p(x)=e^x-x-1$，$q(x)=x-\sin x$，则 $p'(x)=e^x-1>0$，$q(x)=1-\cos x\ge 0$，

所以 $p(x)$，$q(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，从而 $p(x)>0$，$q(x)>0$，即 $e^x>x+1$，$x>\sin x$

故 $m'(x)>1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$，即 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以 $m(x)>0$，

所以 $e^x>\ln(1+x)-\cos x+2$，从而 $e^s>\ln(1+s)-\cos s+2=e^{x_1}$，即 $s>x_1$． ……12分