

2023—2024 学年度上学期高三年级四调考试

数 学

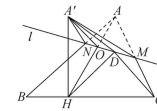
本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。共 4 页,总分 150 分,考试时间 120 分钟。

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合  $A = \{x | -1 < x < 1\}$ ,  $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $[0, 1]$  B.  $(-1, 2]$  C.  $(1, 2]$  D.  $(0, 1)$
  - 已知直线  $l_1: ax + y - 3 = 0$  和直线  $l_2: 3x - 2y + 3 = 0$  垂直, 则  $a =$   
A.  $-\frac{3}{2}$  B.  $\frac{3}{2}$  C.  $-\frac{2}{3}$  D.  $\frac{2}{3}$
  - 已知圆锥的底面半径为 2, 高为  $4\sqrt{2}$ , 则该圆锥的侧面积为  
A.  $4\pi$  B.  $12\pi$  C.  $16\pi$  D.  $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$
  - 已知函数  $f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x(1+x)$ , 则  $f(-1) =$   
A.  $-1$  B.  $-2$  C.  $2$  D.  $0$
  - 已知  $\alpha$  是第一象限角,  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\cos 2\alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} =$   
A.  $-\frac{13}{5}$  B.  $-\frac{7}{5}$  C.  $\frac{13}{5}$  D.  $\frac{1}{10}$
  - 记  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  ( $a_n > 0$ ) 的前  $n$  项和, 且  $a_1 a_3 = 16$ ,  $S_1, \frac{3}{4}S_2, \frac{1}{2}S_3$  成等差数列, 则  $S_6 =$   
A. 126 B. 128 C. 254 D. 256
  - 已知直线  $x + y + 2 = 0$  分别与  $x$  轴,  $y$  轴交于  $A, B$  两点, 点  $P$  在圆  $(x-2)^2 + y^2 = 2$  上, 则  $\triangle ABP$  面积的取值范围是  
A.  $[2, 6]$  B.  $[4, 8]$  C.  $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$  D.  $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$
  - 设  $a = 2 \ln 0.99$ ,  $b = \ln 0.98$ ,  $c = \sqrt{0.96} - 1$ , 则  
A.  $a < b < c$  B.  $b < c < a$  C.  $b < a < c$  D.  $c < b < a$
- 二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。
- 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $S_n = -n^2 + 7n$ , 则下列说法正确的是  
A.  $\{a_n\}$  是递增数列 B.  $a_{10} = -14$   
C. 当  $n > 4$  时,  $a_n < 0$  D. 当  $n = 3$  或  $4$  时,  $S_n$  取得最大值

- 已知函数  $f(x) = (2-x)e^x$ , 则下列说法错误的是  
A.  $f(x)$  的图象在  $x=2$  处的切线斜率大于 0  
B.  $f(x)$  的最大值为  $e$   
C.  $f(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递增  
D. 若  $f(x) = a$  有两个零点, 则  $a < e$
- 已知  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3} + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 为偶函数,  $g(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ , 则下列结论正确的是  
A.  $\varphi = \frac{\pi}{6}$   
B. 若  $g(x)$  的最小正周期为  $3\pi$ , 则  $\omega = \frac{2}{3}$   
C. 若  $g(x)$  在区间  $(0, \pi)$  上有且仅有 3 个最大值点, 则  $\omega$  的取值范围为  $(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}]$   
D. 若  $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $\omega$  的最小值为 2
- 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = \frac{\pi}{2}$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 1$ , 过  $AC$  中点  $M$  的直线  $l$  与线段  $AB$  交于点  $N$ . 将  $\triangle AMN$  沿直线  $l$  翻折至  $\triangle A'MN$ , 且点  $A'$  在平面  $BCMN$  内的射影  $H$  在线段  $BC$  上, 连接  $A'H$  交  $l$  于点  $O$ ,  $D$  是直线  $l$  上异于  $O$  的任意一点, 则  
A.  $\angle A'DH \geq \angle A'DC$   
B.  $\angle A'DH \leq \angle A'OH$   
C. 点  $O$  的轨迹的长度为  $\frac{\pi}{6}$   
D. 直线  $A'O$  与平面  $BCMN$  所成角的余弦值的最小值为  $8\sqrt{3} - 13$



第 II 卷(非选择题 共 90 分)

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

- 已知向量  $a = (2, -1)$ ,  $b = (k, \frac{5}{2})$ , 若  $a \parallel b$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
- 写出一个圆心在  $y = x$  上, 且与直线  $y = -x$  和圆  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$  都相切的圆的方程\_\_\_\_\_.
- 已知表面积为  $100\pi$  的球面上有  $S, A, B, C$  四点,  $\triangle ABC$  是等边三角形, 球心  $O$  到平面  $ABC$  的距离为 3, 若平面  $SAB \perp$  平面  $ABC$ , 则三棱锥  $S-ABC$  体积的最大值为\_\_\_\_\_.
- 若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{4}{3}$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 则  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2017}}$  的整数部分是\_\_\_\_\_.

班级
姓名
得分

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中,内角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ ,且 $c \sin \frac{A+C}{2} = b \sin C$ .

(1)求 $B$ ;

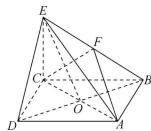
(2)若 $BD$ 是 $AC$ 边上的高,且 $BD=1, b=\sqrt{3}$ ,求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分)

如图,在四棱锥 $E-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle ADC=60^\circ$ , $AC$ 与 $BD$ 交于点 $O$ , $EC \perp$ 底面 $ABCD$ , $F$ 为 $BE$ 的中点, $AB=CE$ .

(1)证明: $DE \parallel$ 平面 $ACF$ ;

(2)求 $AF$ 与平面 $EBD$ 所成角的正弦值.



19. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是各项都为正整数的等比数列, $a_1=3$ ,且 $a_3$ 是 $a_2$ 与 $\frac{3}{4}a_4$ 的等差中项,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1, b_{n+1}=2b_n+1$ .

(1)求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $k \cdot \frac{b_n+5}{2} - a_n \geq 8n+2k-24$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,求实数 $k$ 的取值范围.

20. (12 分)

已知点 $P$ 到 $A(-2,0)$ 的距离是点 $P$ 到 $B(1,0)$ 的距离的 2 倍.

(1)求点 $P$ 的轨迹方程;

(2)若点 $P$ 与点 $Q$ 关于点 $B$ 对称,过 $B$ 的直线与点 $Q$ 的轨迹 $\Gamma$ 交于 $E, F$ 两点,则 $\vec{BE} \cdot \vec{BF}$ 是否为定值?若是,求出该定值;若不是,请说明理由.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - a \sin x - 1 (a \in \mathbf{R})$ .

(1)当 $a=1$ 时,讨论函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上的单调性;

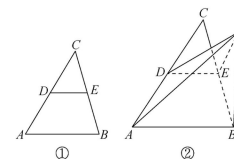
(2)当 $a=-3$ 时,证明:对 $\forall x \in (0, +\infty)$ ,都有 $f(x) < e^x + x + 1 - 2e^{-2x}$ .

22. (12 分)

如图①,在 $\triangle ABC$ 中, $BC=4, AB=\sqrt{13}, \cos B = \frac{\sqrt{13}}{13}$ , $E, D$ 分别为 $BC, AC$ 的中点,以 $DE$ 为折痕,将 $\triangle DCE$ 折起,使点 $C$ 到 $C_1$ 的位置,且 $BC_1=2$ ,如图②.

(1)设平面 $C_1AD \cap$ 平面 $BEC_1 = l$ ,证明: $l \perp$ 平面 $ABC_1$ ;

(2)若 $P$ 是棱 $C_1D$ 上一点(不含端点),过 $P, B, E$ 三点作该四棱锥的截面与平面 $BEC_1$ 所成的锐二面角的正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,求该截面将四棱锥分成上下两部分的体积之比.



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：  
www.zizs.com](http://www.zizs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线