

“德化一中、永安一中、漳平一中”三校协作

2023—2024 学年第一学期联考

高三数学试题

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 若集合 $A = \{x | |x-1| \leq 2, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x | \ln x \leq 0\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】结合解不等式以及对数函数的单调性，求得集合 A, B ，根据集合的交集运算，即可得答案.

【详解】由题意得 $A = \{x | |x-1| \leq 2, x \in \mathbb{N}\} = \{x | -1 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, 3\}$,

$B = \{x | \ln x \leq 0\} = \{x | 0 < x \leq 1\}$,

故 $A \cap B = \{1\}$ ，即 $A \cap B$ 的元素个数是 1 个.

故选: A

2. 复数 $z = \frac{i}{1-i^2}$ 的虚部为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}i$

【答案】C

【解析】

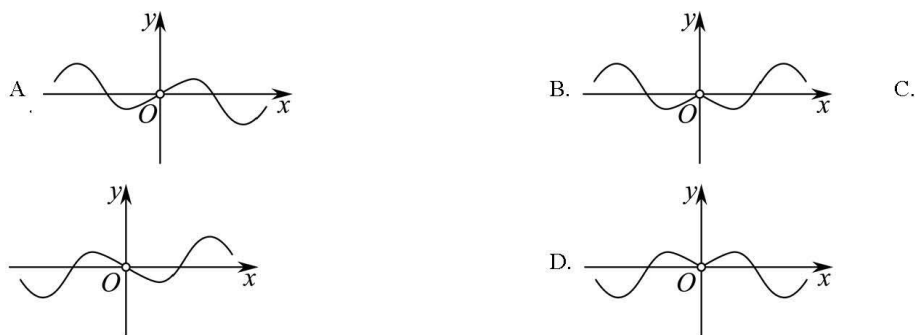
【分析】根据 i 的性质、复数的除法运算可得答案.

【详解】 $z = \frac{i}{1-i^2} = \frac{i}{1-(-1)} = \frac{i}{2} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$,

所以 z 的虚部为 $\frac{1}{2}$.

故选: C.

3. 函数 $y = \sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2}$ 的图象可能是 ().



【答案】A

【解析】

【分析】利用排除法，结合函数的奇偶性以及函数值的符号分析判断.

【详解】因为 $y = f(x) = \sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2}$ 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,

$$\text{且 } f(-x) = \sin(-x) \cdot \frac{(-x)^2+2}{(-x)^2} = -\sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2} = -f(x),$$

所以 $y = \sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2}$ 为奇函数，函数图象关于原点对称，故 B, D 都不正确；

对于 C, $x \in (0, \pi)$ 时, $\sin x > 0$, $\frac{x^2+2}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} > 1$,

所以 $\ln \frac{x^2+2}{x^2} > 0$, 所以 $y = \sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2} > 0$, 故 C 不正确；

对于选项 A, 符合函数图象关于原点对称, 也符合 $x \in (0, \pi)$ 时, $y = \sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2} > 0$, 故 A 正确.

故选: A.

4. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = 2\sqrt{2}, c = 4, C = 45^\circ$, 则 A 的值可以为 ()

A. 30° B. 60° C. 120° D. 30° 或 150°

【答案】A

【解析】

【分析】由正弦定理求出 $\sin A = \frac{1}{2}$, 结合 $A \in (0^\circ, 135^\circ)$ 求出答案.

【详解】由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{4}{\sin 45^\circ}$,

故 $\sin A = \frac{1}{2}$,

因为 $C = 45^\circ$, 所以 $A \in (0^\circ, 135^\circ)$, 故 $A = 30^\circ$.

故选: A

5. 若向量 $\vec{a} = (0, 2, 2)$, $\vec{b} = (1, 0, \lambda)$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp 2\vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量是 ()

- A. $2\vec{b}$ B. $\vec{b}$ C. $-\vec{b}$ D. $-2\vec{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据空间向量的坐标运算求出 $\lambda = -1$, 再根据投影向量的定义即可求解.

【详解】 $\because \vec{a} = (0, 2, 2)$, $\vec{b} = (1, 0, \lambda)$,

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = (1, 2, 2 + \lambda), \quad 2\vec{b} = (2, 0, 2\lambda)$$

$$\because (\vec{a} + \vec{b}) \perp 2\vec{b},$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot 2\vec{b} = 2 + (2 + \lambda)2\lambda = 0, \text{ 解得 } \lambda = -1,$$

$$\therefore \vec{b} = (1, 0, -1),$$

$$\therefore \vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 方向上的投影向量为 } \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\vec{b}}{\sqrt{2}} = -\vec{b}.$$

故选: C.

6. 设 $a = \frac{2^{2022} + 1}{2^{2023} + 1}$, $b = \frac{2^{2023} + 1}{2^{2024} + 1}$, 则下列说法中正确的是 ()

- A. $a < b$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$ C. $a^2 + b^2 \geq 2$ D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据 a, b 的结构特征构造函数 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^{x+1} + 1}$, 判断其单调性, 即可判断 A; 结合指数函数的单

调性, 判断 B; 根据 a, b 的范围判断 C, 利用基本不等式以及等号成立条件判断 D.

【详解】设 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^{x+1} + 1}$, 则 $f(x) = \frac{\frac{1}{2}(2^{x+1} + 1) + \frac{1}{2}}{2^{x+1} + 1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2^{x+1} + 1},$

因为 $y = 2^{x+1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，

所以 $f(2022) > f(2023)$ ，即 $\frac{2^{2022}+1}{2^{2023}+1} > \frac{2^{2023}+1}{2^{2024}+1}$ ， $\therefore a > b$ ，A 错误，

因为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，故 $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$ ，B 正确；

由于 $0 < \frac{2^{2022}+1}{2^{2023}+1} < 1$ ， $0 < \frac{2^{2023}+1}{2^{2024}+1} < 1$ ，即 $0 < a, b < 1$ ，

故 $a^2 + b^2 < 2$ ，C 错误；

$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$ ，当且仅当 $a = b$ 时取等号，

但 $a > b$ ，故 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ ，D 错误，

故选：B

7. 我国古代的洛书中记载着世界上最古老的一个幻方：如图，将 1, 2, 3, ..., 9 填入 3×3 的方格内，使三行，三列和两条对角线上的三个数字之和都等于 15。一般地，将连续的正整数 1, 2, 3, ..., n^2 填入 $n \times n$ 的方格中，使得每行，每列和两条对角线上的数字之和都相等，这个正方形叫做 n 阶幻方。记 n 阶幻方的每列的数字之和为 N_n ，如图，三阶幻方的 $N_3 = 15$ ，那么 $N_9 =$ ()

4	9	2
3	5	7
8	1	6

A. 41

B. 369

C. 1476

D. 3321

【答案】B

【解析】

【分析】直接利用等差数列的性质及求和公式求解即可。

【详解】由等差数列的性质得：九阶幻方所有数字之和为 $\frac{81}{2}(1+81) = 3321$ ，

由于每列和对角线上的数字之和都相等，

所以每列的数字之和为 $\frac{3321}{9} = 369$ ，

故选：B.

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2\ln x}{x}, & x > 0 \\ \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right), & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$, 若 $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$ 恰有 6 个不同实数解, 正实数 ω 的

范围为 ()

A. $\left(\frac{10}{3}, 4\right]$

B. $\left[\frac{10}{3}, 4\right)$

C. $\left(2, \frac{10}{3}\right]$

D. $\left[2, \frac{10}{3}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】把问题转化为 $y = f(x)$ 与 $y = 1$ 或 $y = \frac{1}{2}$ 的交点, 画出图形, 数形结合, 再结合单调性和对称性求出参数范围即可.

【详解】由题知,

$2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$ 的实数解可转化为 $f(x) = \frac{1}{2}$ 或 $f(x) = 1$ 的实数解, 即

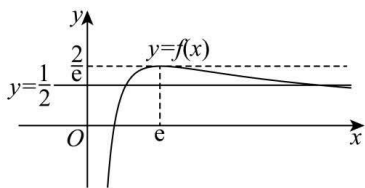
$y = f(x)$ 与 $y = 1$ 或 $y = \frac{1}{2}$ 的交点,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{2\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$

所以 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

如图所示:



所以 $x = e$ 时 $f(x)$ 有最大值: $\frac{1}{2} < f(x)_{\max} = \frac{2}{e} < 1$

所以 $x > 0$ 时, 由图可知 $y = f(x)$ 与 $y = 1$ 无交点, 即方程 $f(x) = 1$ 无解,

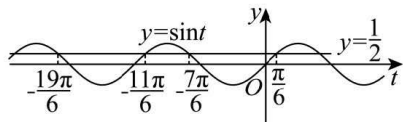
$y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}$ 有两个不同交点, 即方程 $f(x) = \frac{1}{2}$ 有 2 解

当 $x < 0$ 时, 因为 $\omega > 0$, $-\pi \leq x \leq 0$,

所以 $-\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \omega x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}$,

令 $t = \omega x + \frac{\pi}{6}$, 则 $t \in \left[-\omega\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

则有 $y = \sin t$ 且 $t \in \left[-\omega\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, 如图所示:



因为 $x > 0$ 时, 已有两个交点,

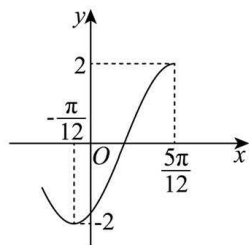
所以只需保证 $y = \sin t$ 与 $y = \frac{1}{2}$ 及与 $y = 1$ 有四个交点即可,

所以只需 $-\frac{19\pi}{6} < -\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq -\frac{11\pi}{6}$, 解得 $2 \leq \omega < \frac{10}{3}$.

故选: D

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 ()



A. $\omega = 2$

B. $\varphi = \frac{\pi}{3}$

C. 点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

D. 直线 $x = \frac{11\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称轴

【答案】ACD

【解析】

【分析】A 选项，根据图象得到函数最小正周期，进而得到 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ；B 选项，将 $\left(-\frac{\pi}{12}, -2\right)$ 代入解析

式，求出 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ ；C 选项， $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，C 正确；D 选项，计算出 $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -2$ ，故 D 正确。

【详解】A 选项，设 $f(x)$ 的最小的正周期为 T ，

由图象可知， $\frac{1}{2}T = \frac{5}{12}\pi - \left(-\frac{1}{12}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi$ ，解得 $T = \pi$ ，

因为 $\omega > 0$ ，所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，A 正确；

B 选项，将 $\left(-\frac{\pi}{12}, -2\right)$ 代入 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ 中得， $2\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = -2$ ，

故 $-\frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，即 $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，所以只有当 $k = 0$ 时，满足要求，

故 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ ，B 错误；

C 选项， $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，故 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ，

故点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心，C 正确；

D 选项， $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = -2$ ，

故直线 $x = \frac{11\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称轴，D 正确。

故选：ACD

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = a_n + 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则下列结论正确的是 ()

A. $a_4 = 13$

B. $\{a_n\}$ 是递增数列

C. $a_{10} < 1000$

D. $a_{n+1} = 2a_n + 1$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据题意，化简得到 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{2^n} - 1\right)$ ，得到 $\left\{\frac{a_n}{2^n} - 1\right\}$ 表为等比数列，进而求得数列的通项公

式 $a_n = 2^n - 1$ ，结合选项，逐项判定，即可求解。

【详解】由 $a_{n+1} = a_n + 2^n$, 可得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$, 则 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - 1 = \frac{1}{2}(\frac{a_n}{2^n} - 1)$,

又由 $a_1 = 1$, 可得 $\frac{a_1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, 所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n} - 1\right\}$ 表示首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

所以 $\frac{a_n}{2^n} - 1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 所以 $a_n = 2^n - 1$,

由 $a_4 = 2^4 - 1 = 15$, 所以 A 不正确;

由 $a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 1 - 2^n + 1 = 2^n > 0$, 即 $a_{n+1} > a_n$, 所以 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 B 正确;

由 $a_{10} = 2^{10} - 1 = 1023 > 1000$, 所以 C 错误;

由 $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$, $2a_n + 1 = 2 \cdot 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, 所以 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 所以 D 正确.

故选: BD.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $g(x) + f(x) = 1$, 且 $g(x+1), f(2-x)$ 均为奇函数, 则 ()

A. $g(0) = -1$

B. $g(1) = 0$

C. $g(2) = 1$

D. $g(3) = 0$

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据奇函数定义可得 $g(x) = -g(-x+2)$, $f(x) = -f(4-x)$, 即可代值逐一求解.

【详解】因为 $g(x+1), f(2-x)$ 均为奇函数, 所以 $g(x+1) = -g(-x+1), f(2-x) = -f(2+x)$, 即

$$g(x) = -g(-x+2) \text{ ①}, f(x) = -f(4-x),$$

因为 $g(x) + f(x) = 1$, 即 $f(x) = 1 - g(x)$, 所以 $1 - g(x) = -[1 - g(4-x)]$, 即 $g(x) + g(4-x) = 2$

②.

由①, 取 $x=1$ 得 $g(1) = 0$,

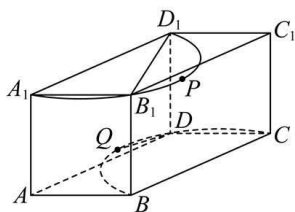
由②, 令 $x=2$, 得 $g(2) = 1$; 令 $x=3$, 得 $g(3) + g(1) = 2$, 所以 $g(3) = 2$.

由①, 令 $x=0$, 得 $g(0) = -g(2) = -1$.

故选: ABC

12. 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle BAD = 60^\circ, AB = AA_1 = 1$, 点

P 是经过点 B_1 的半圆弧 $\widehat{A_1D_1}$ 上的动点 (不包括端点), 点 Q 是经过点 D 的半圆弧 $\widehat{BC}$ 上的动点 (不包括端点), 则下列说法正确的是 ()



- A. 四面体 $PBCQ$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}$
- B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A_1P}$ 的取值范围是 $[0, 4]$
- C. 若二面角 C_1-QB-C 的平面角为 θ , 则 $\tan \theta > \frac{1}{2}$
- D. 若三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球表面积为 S , 则 $S \in [4\pi, 13\pi)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据棱锥的体积公式可判断 A; 根据向量的相等以及数量积的定义可判断 B; 结合二面角平面角定义找出 θ , 结合解直角三角形判断 C; 确定三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球球心位置, 列等式求得半径表达式, 求得其取值范围, 即可求出三棱锥 $P-BCQ$ 外接球表面积取值范围, 判断 D.

【详解】由题意知在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 半圆弧 $\widehat{BC}$ 经过点 D , 故 $BC = 2$,

点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 $AA_1 = 1$,

当点 Q 位于半圆弧 $\widehat{BC}$ 上的中点时 $S_{\triangle BCQ}$ 最大, 即四面体 $PBCQ$ 体积最大,

则 $(V_{P-BCQ})_{\max} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$, 故 A 正确;

由于 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A_1D_1}$, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{A_1D_1} \cdot \overrightarrow{A_1P}$,

又在 $\text{Rt}\triangle A_1PD_1$ 中, $\cos \angle D_1AP = \frac{A_1P}{A_1D_1}$,

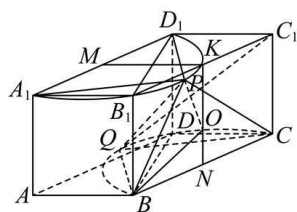
故 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{A_1D_1} \cdot \overrightarrow{A_1P} = |\overrightarrow{A_1D_1}| |\overrightarrow{A_1P}| \cos \angle D_1AP = 4 \cos^2 \angle D_1AP$,

因为 $\angle D_1AP \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos \angle D_1AP \in (0, 1)$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A_1P} \in (0, 4)$, 故 B 错误;

因为 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $QB \subset$ 平面 $ABCD$, 故 $CC_1 \perp QB$, 而 $QB \perp QC$,

$CC_1 \cap QC = C, CC_1, QC \subset$ 平面 C_1CQ , 故 $QB \perp$ 平面 C_1CQ , $C_1Q \subset$ 平面 C_1CQ ,

故 $QB \perp C_1Q$, 所以 $\angle C_1QC$ 是二面角 C_1-QB-C 的平面角,



则 $\tan \angle C_1QC = \frac{CC_1}{CQ} = \frac{1}{CQ}$, 因为 $CQ \in (0, 2)$, 所以 $\tan \angle C_1QC > \frac{1}{2}$, 故 C 正确;

设线段 BC 的中点为 N , 线段 B_1C_1 的中点为 K , 则三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球球心 O 在 NK 上,

在四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle A_1MK = 120^\circ$, $A_1K = \sqrt{1+1-2 \times 1 \times 1 \times (-\frac{1}{2})} = \sqrt{3}$,

设 $PK = t$, $(0 \leq t < \sqrt{3})$, 在 $\text{Rt}\triangle OQN$ 中 $ON = \sqrt{R^2 - 1}$, 在 $\text{Rt}\triangle OPK$ 中 $OK = \sqrt{R^2 - t^2}$,

故 $ON + OK = \sqrt{R^2 - 1} + \sqrt{R^2 - t^2} = 1$,

整理得 $R^2 = \frac{t^4 + 4}{4}$, 所以 $R^2 \in [1, \frac{13}{4})$, 所以外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 \in [4\pi, 13\pi)$, D 正确,

故选: ACD

【点睛】难点点睛: 解答本题的难点在选项 D 的判断, 解答时要发挥空间想象, 明确空间的点线面位置关系, 确定外接球球心位置, 进而找出等量关系, 求得球的半径取值范围, 即可求解球表面积取值范围.

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 已知角 α 的顶点为原点, 始边为 x 轴的非负半轴, 若其终边经过点 $P(-1, 2)$, $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据三角函数定义得到 $\tan \alpha = -2$, 利用二倍角公式和同角三角函数关系化为齐次式, 化弦为切, 代入求值.

【详解】由题意得 $\tan \alpha = \frac{2}{-1} = -2$,

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha + 1} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{-4}{2 + 4} = -\frac{2}{3}.$$

故答案为: $-\frac{2}{3}$

14. 命题“ $\exists x \in \mathbb{R}, ax^2 + ax + 1 \leq 0$ ”为假命题, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $[0, 4)$

【解析】

【分析】依题意可得“ $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + ax + 1 > 0$ ”是真命题，分 $a = 0$ 、 $a \neq 0$ 两种情况讨论，分别计算可得。

【详解】命题“ $\exists x \in \mathbb{R}, ax^2 + ax + 1 < 0$ ”是假命题，
则它的否定命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + ax + 1 > 0$ ”是真命题，
当 $a = 0$ 时，不等式为 $1 > 0$ ，显然成立；

当 $a \neq 0$ 时，应满足 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = a^2 - 4a < 0 \end{cases}$ ，解得 $0 < a < 4$ ，

所以实数 a 的取值范围是 $[0, 4)$ 。

故答案为： $[0, 4)$ 。

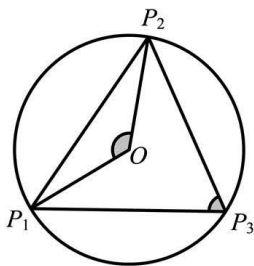
15. 设点 P_1, P_2, P_3 在 $\odot O$ 上，若 $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = \vec{0}$ ，则 $\angle P_1 P_2 P_3 =$ _____。

【答案】 $\frac{\pi}{3}$ 或 60°

【解析】

【分析】先根据平面向量的数量积运算律，得 $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_3} = -\frac{r^2}{2}$ ；再根据平面向量的数量积定义，得 $\cos \angle P_1 O P_3 = -\frac{1}{2}$ ；最后根据圆的性质即可解答。

【详解】



记 $\odot O$ 的半径为 r ，则 $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = r$ 。

$$\because \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = \vec{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3} = -\overrightarrow{OP_2}.$$

$$\therefore (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3}) \cdot (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3}) = (-\overrightarrow{OP_2}) \cdot (-\overrightarrow{OP_2}), \text{ 即 } \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_3} = -\frac{r^2}{2}.$$

$$\therefore \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_3} = |\overrightarrow{OP_1}| |\overrightarrow{OP_3}| \cos \angle P_1OP_3$$

$$\therefore \cos \angle P_1OP_3 = \frac{\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_3}}{|\overrightarrow{OP_1}| |\overrightarrow{OP_3}|} = -\frac{1}{2}, \text{ 因为 } \angle P_1OP_3 \in [0, \pi],$$

$$\therefore \text{在 } \triangle P_1OP_3 \text{ 中, } \angle P_1OP_3 = \frac{2\pi}{3}, \text{ 则 } |P_1P_2| = \sqrt{3}r, \text{ 同理 } |P_1P_3| = |P_2P_3| = \sqrt{3}r,$$

所以三角形 $P_1P_2P_3$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle P_1P_2P_3 = \frac{\pi}{3}.$$

故答案为: $\frac{\pi}{3}$.

16. 已知无穷等差数列 $\{a_n\}$ 中的各项均大于 0, 且 $a_1 + a_3^2 + a_5 = 8$, 则 $\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_{11}}{a_3}$ 的范围为_____.

【答案】 $[-1, +\infty)$

【解析】

【分析】根据题意, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 分析可得 d 的取值范围, 由 $a_1 + a_3^2 + a_5 = 8$ 求出 a_3 , 则

$$\text{有 } \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_{11}}{a_3} = \frac{2}{2-2d} - \frac{2+8d}{2} = \frac{1}{1-d} - 1 - 4d, \text{ 构造函数 } f(x) = \frac{1}{1-x} - 4x - 1, \text{ 利用导数可求出其最值,}$$

从而可得答案.

【详解】根据题意, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由于无穷等差数列 $\{a_n\}$ 中的各项均大于 0,

则 $d > 0$, 由于 $a_1 + a_3^2 + a_5 = 8$, 则 $a_3^2 + 2a_3 - 8 = 0$,

解得 $a_3 = 2$ 或 $a_3 = -4$ (舍去),

$$\text{所以 } \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_{11}}{a_3} = \frac{2}{2-2d} - \frac{2+8d}{2} = \frac{1}{1-d} - 1 - 4d,$$

因为 $a_1 = a_3 - 2d = 2 - 2d > 0$, 所以 $0 < d < 1$,

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{1-x} - 4x - 1 (0 < x < 1),$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - 4, \text{ 由 } f'(x) = 0, \text{ 得 } \frac{1}{(1-x)^2} - 4 = 0, \text{ 得 } (1-x)^2 = \frac{1}{4}, \text{ 解得 } x = \frac{1}{2} \text{ 或 } x = \frac{3}{2} \text{ (舍)}$$

去),

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上递减, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上递增,

所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 4 \times \frac{1}{2} - 1 = -1$,

所以 $f(x) \in [-1, +\infty)$, 即 $\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_{11}}{a_3}$ 的范围为 $[-1, +\infty)$.

故答案为: $[-1, +\infty)$

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi + x)\cos x - \sqrt{3}$

(1) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 的最值, 及取最值时对应的 x 的值;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, A 为锐角, 且 $f(A) = \sqrt{3}$, $a = \sqrt{3}$, $b + c = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) $f_{\max}(x) = 2$, $x = \frac{5\pi}{12}$; $f_{\min}(x) = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$

(2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】(1) 利用诱导公式以及二倍角公式结合辅助角公式化简可得 $f(x)$ 的表达式, 根据 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 范围,

结合正弦函数性质, 即可求得答案;

(2) 结合 (1) 的结果可求出角 A , 利用余弦定理可求出 bc 的值, 利用三角形面积公式即可求得答案.

【小问 1 详解】

$$f(x) = 2\sqrt{3} \sin^2 x + \sin 2x - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \times \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x - \sqrt{3}$$

$$= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\because \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore 1 \leq 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \leq 2,$$

$$\text{当 } 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } x = \frac{5\pi}{12} \text{ 时, } f(x)_{\max} = 2;$$

$$\text{当 } 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } f(x)_{\min} = 1;$$

【小问 2 详解】

$$\text{由 } f(A) = 2\sin(2A - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}, \text{ 即 } \sin(2A - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{而 } A \text{ 为锐角, } 0 < A < \frac{1}{2}\pi, \text{ 则 } -\frac{\pi}{3} < 2A - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore 2A - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \therefore A = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{又 } a = \sqrt{3}, b + c = 2\sqrt{3},$$

$$\text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ 即 } 3 = (b + c)^2 - 3bc, \text{ 即 } bc = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

18. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 - a$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象在 $x = 0$ 处的切线为 $y = ax$.

(1) 设 $g(x) = f(x) + x^2 - x$, 求 $g(x)$ 的最小值;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x} > k$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

【答案】(1) 0 (2) $k < e - 2$

【解析】

【分析】(1) 先根据导数的几何意义求出 a , 再利用导数判断函数 $g(x)$ 单调性进而求解最小值;

(2) 先将恒成立问题转化为 $k < \left(\frac{f(x)}{x}\right)_{\min}$, 利用导数判断函数单调性进而求出函数最小值即可.

【小问 1 详解】

$$f'(x) = e^x - 2x, \text{ 由题意知 } a = f'(0) = 1,$$

$$\text{所以 } g(x) = f(x) + x^2 - x = e^x - x - 1, \quad g'(x) = e^x - 1$$

$$\text{令 } g'(x) = 0 \text{ 得 } x = 0,$$

当 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减;

当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增;

故 $g(x)_{\min} = g(0) = 0$, 即 $g(x)$ 的最小值为 0.

【小问 2 详解】

令 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $k < h(x)_{\min}$, $h'(x) = \frac{(x-1)(e^x - x - 1)}{x^2} (x > 0)$

由 (1) 可知当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $e^x - x - 1 > 0$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增;

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = e - 2$,

故 $k < e - 2$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, 且 $2nS_{n+1} - 2(n+1)S_n = n(n+1) (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列;

(2) 已知等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_3 = 5$, 其前 9 项和为 63. 令 $c_n = \frac{1}{a_n b_n}$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{1}{3} \leq T_n < \frac{3}{4}$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由题意可得 $\therefore \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}$, 再结合当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n$ 求出即可;

(2) 用基本量法求出 $\{b_n\}$, 利用裂项相消法求出 T_n , 适当放缩即可证明.

【小问 1 详解】

证明: $\because 2nS_{n+1} - 2(n+1)S_n = n(n+1) (n \in \mathbb{N}^*)$, $\therefore \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列

$$\frac{S_n}{n} = 1 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{可得 } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n$$

当 $n=1$ 时, 也满足上式, $\therefore a_n = n$

【小问 2 详解】

$$\text{证明: } \because \frac{9(b_1 + b_9)}{2} = 9b_5 = 63, \therefore b_5 = 7$$

$$\therefore \text{等差数列 } \{b_n\} \text{ 的公差 } d = \frac{b_5 - b_3}{2} = 1, b_1 = b_3 - 2d = 3$$

$$\therefore b_n = n + 2$$

$$\therefore c_n = \frac{1}{a_n b_n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

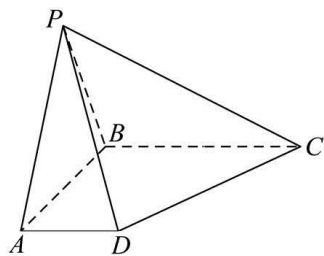
$$\because \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} > 0, \therefore T_n < \frac{3}{4}$$

$$\because T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} > 0, \therefore \text{数列 } \{T_n\} \text{ 是递增数列}$$

$$\therefore T_n \geq T_1 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq T_n < \frac{3}{4}$$

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAB$ 是边长为 2 的正三角形, $BC = AB$, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, $AB \perp BC$, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 设平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = l$, 问: 线段 PB 上是否存在一点 E , 使 $l \parallel$ 平面 ADE ?

(2) 平面 PAB 与平面 PCD 的夹角的余弦值.

【答案】(1) 存在 E 为 PB 的中点, 使 $l \parallel$ 平面 ADE

(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

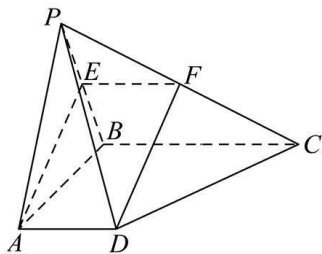
【解析】

【分析】(1) 分别取 PB 、 PC 的中点 E 、 F , 证明四边形 $EFDA$ 为平行四边形, $DF \parallel AE$, 从而 $DF \parallel$ 平面 PAB , 再由线面平行的性质定理得到 $DF \parallel l$, 即 $AE \parallel l$, 从而 $l \parallel$ 平面 ADE ;

(2) 由平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 得出 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 建立空间直角坐标系求解.

【小问 1 详解】

存在 E 为 PB 的中点, 使 $l \parallel$ 平面 ADE .



分别取 PB 、 PC 的中点 E 、 F , 连接 AE 、 EF 、 DF ,

$$\therefore EF \parallel BC, EF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because AD \parallel BC, BC = 2AD,$$

$$\therefore EF \parallel AD, EF = AD,$$

$$\therefore \text{四边形 } EFDA \text{ 为平行四边形, } \therefore DF \parallel AE,$$

$$\because AE \subset \text{平面 } PAB, DF \not\subset \text{平面 } PAB,$$

$$\therefore DF \parallel \text{平面 } PAB,$$

$$\because \text{平面 } PAB \cap \text{平面 } PCD = l, DF \subset \text{平面 } PCD,$$

$$\therefore DF \parallel l, \therefore AE \parallel l,$$

$$\because AE \subset \text{平面 } ADE, l \not\subset \text{平面 } ADE,$$

$$\therefore l \parallel \text{平面 } ADE.$$

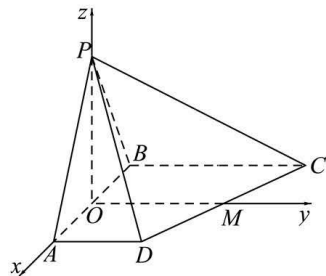
即线段 PB 上存在一点 E , 使 $l \parallel$ 平面 ADE .

【小问 2 详解】

分别取 AB 、 CD 中点 O 、 M , 连接 PO 、 OM , $\therefore OM \parallel BC$,

$\because AB \perp BC, \therefore AB \perp OM,$

$\because PA = PB, \therefore PO \perp AB,$



$\because$ 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, $PO \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$.

以 O 为原点, 以 OA, OP, OM 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

$\therefore P(0, 0, \sqrt{3}), C(-1, 2, 0), D(1, 1, 0),$

$\therefore \overrightarrow{PD} = (1, 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{DC} = (-2, 1, 0),$

设向量 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为平面 PCD 的一个法向量,

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PD} = x + y - \sqrt{3}z = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DC} = -2x + y = 0, \end{cases}$ 取 $x = 1$, 得 $\vec{m} = (1, 2, \sqrt{3}),$

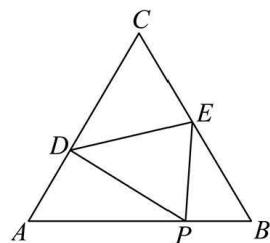
又 $\vec{n} = (0, 1, 0)$ 为平面 PAB 的一个法向量,

设平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 θ ,

$\therefore \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{2}{\sqrt{1+4+3}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$\therefore$ 平面 PAB 与平面 PCD 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

21. 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $c(\cos A - \sqrt{3} \sin A) = b - 2a$, $c = 2$.



(1) 求角 C ;

(2) 若 $AB = BC$, 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 BC 上分别取点 D, E , 将 $\triangle CDE$ 沿线段 DE 折叠到平面 ABE 后, 顶点 C 恰好落在边 AB 上 (设为点 P), 设 $CE = x$, 当 CE 取最小值时, 求 $\triangle PBE$ 的面积.

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) $14\sqrt{3} - 24$

【解析】

【分析】(1) 利用正弦定理化简已知条件, 进而求得 C .

(2) 利用正弦定理或余弦定理, 结合基本不等式或三角函数的最值等知识求得 CE 取最小值时 $\triangle PBE$ 的面积.

【小问 1 详解】

由正弦定理得 $\sin C(\cos A - \sqrt{3}\sin A) = \sin B - 2\sin A$,

$\therefore \sin C(\cos A - \sqrt{3}\sin A) = \sin(A+C) - 2\sin A$,

$\therefore \sin C(\cos A - \sqrt{3}\sin A) = \sin A \cos C + \cos A \sin C - 2\sin A$,

即 $\sqrt{3}\sin A \sin C + \sin A \cos C = 2\sin A$,

$\because A \in (0, \pi), \therefore \sin A > 0$,

$\therefore 2\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = 2$ 即 $\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = 1$,

$\because C \in (0, \pi), \therefore C + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right), \therefore C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$,

$\therefore C = \frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

方法一: $\because AB = BC, C = \frac{\pi}{3}, \therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore AB = BC = AC = 2$,

$\because CE = PE = x, BE = 2 - x, BP = m, m \in (0, 2)$,

在 $\triangle BPE$ 中, 由余弦定理得,

$PE^2 = BP^2 + BE^2 - 2BP \cdot BE \cos B$,

$$\text{即 } x^2 = m^2 + (2-x)^2 - 2m(2-x) \times \frac{1}{2},$$

$$\text{整理可得 } x = \frac{m^2 - 2m + 4}{4 - m}, \quad m \in (0, 2),$$

$$\therefore x = 4 - m + \frac{12}{4 - m} - 6 \geq 2\sqrt{(4 - m) \times \frac{12}{4 - m}} - 6 = 4\sqrt{3} - 6,$$

当且仅当 $m = 4 - 2\sqrt{3}$ 时取等号,

即 $BP = 4 - 2\sqrt{3}$ 时, CE 取最小值 $4\sqrt{3} - 6$,

此时 $BE = 8 - 4\sqrt{3}$,

$$\therefore S_{\triangle PBE} = \frac{1}{2} BP \cdot BE \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times (4 - 2\sqrt{3}) \times (8 - 4\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3} - 24.$$

方法二: $\because AB = BC, C = \frac{\pi}{3}, \therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore AB = BC = AC = 2$,

$\because CE = PE = x, BE = 2 - x, x \in (0, 2),$

设 $\angle EPB = \alpha, \alpha \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right),$

在 $\triangle BPE$ 中, 由正弦定理得,

$$\frac{PE}{\sin \angle EBP} = \frac{BE}{\sin \angle EPB}, \text{ 即 } \frac{x}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 - x}{\sin \alpha},$$

$$\text{整理可得 } x = \frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad \alpha \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right),$$

当且仅当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, x 取最小值 $4\sqrt{3} - 6$,

当 CE 取最小值 $4\sqrt{3} - 6$ 时, $BE = 8 - 4\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle BPE$ 中, $\angle BEP = \frac{\pi}{6}, BP = \frac{1}{2} BE = 4 - 2\sqrt{3},$

$$\therefore S_{\triangle PBE} = \frac{1}{2} BP \cdot BE \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times (4 - 2\sqrt{3}) \times (8 - 4\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3} - 24.$$

22. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax - \frac{1}{x}.$

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证: $x_1 x_2 > 2e^2$.

【答案】(1) 答案见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 求出函数导数, 结合一元二次方程的根, 判断导数正负, 即可得答案;

(2) 根据 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 推出 $\ln x_1 + \ln x_2 - 2 \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{x_2}{x_1} + 1}{\frac{x_2}{x_1} - 1} \ln \frac{x_2}{x_1}$, 结合换元, 证明

$\ln x_1 + \ln x_2 - 2 \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 2$, 继而构造函数 $s(u) = \ln u - \frac{2}{u} - 1$, 判断其单调性, 结合零点存在定理推出

$\sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{2}e$, 从而证明结论.

【小问 1 详解】

由题意知 $f(x) = \ln x - ax - \frac{1}{x}$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a + \frac{1}{x^2} = \frac{-ax^2 + x + 1}{x^2},$$

若 $a > 0$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $-ax^2 + x + 1 = 0$,

$\therefore \Delta = 1 + 4a > 0, (a > 0)$,

故方程 $-ax^2 + x + 1 = 0$ 有两个实数根 $t_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a}, t_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2a}$ (舍),

当 $0 < x < t_1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > t_1$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a}, +\infty)$ 上单调递减;

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a}, +\infty)$ 上单调递减;

【小问2详解】

证明：由(1)可知当 $a \leq 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，不可能有两个零点，

$\therefore a > 0$

由 $f(x_1) = f(x_2) = 0, (0 < x_1 < x_2)$ 得， $\ln x_1 - ax_1 - \frac{1}{x_1} = 0, \ln x_2 - ax_2 - \frac{1}{x_2} = 0$,

$$\therefore \ln x_2 - \ln x_1 - \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = a(x_2 - x_1), \therefore a = \frac{\ln x_2 - \ln x_1 - \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)}{x_2 - x_1},$$

$$\text{又 } \ln x_1 + \ln x_2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = a(x_1 + x_2),$$

$$\therefore \ln x_1 + \ln x_2 - 2\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = (\ln x_2 - \ln x_1) \left(\frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1}\right) = \frac{\frac{x_2}{x_1} + 1}{\frac{x_2}{x_1} - 1} \ln \frac{x_2}{x_1}$$

令 $t = \frac{x_2}{x_1}, g(t) = \frac{t+1}{t-1} \ln t$ ，则 $t > 1$ ，猜想 $g(t) > 2$ ，下面证明：

要证明 $g(t) - 2 = \frac{t+1}{t-1} \ln t - 2 > 0$ ，即需证明 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ ，

$$\text{令 } h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, \text{ 则 } h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2(t+1) - 2(t-1)}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

即 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，故 $h(t) > h(1) = 0$ ，

故 $g(t) > 2$ 成立；

$$\therefore \ln x_1 + \ln x_2 - 2\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 2,$$

$$\therefore 2 < \ln x_1 + \ln x_2 - 2\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} < \ln x_1 x_2 - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}} = 2 \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}},$$

令 $u = \sqrt{x_1 x_2}, (u > 0)$ ，则 $2 \ln u - \frac{4}{u} - 2 > 0$ ，即 $\ln u - \frac{2}{u} - 1 > 0$ ，

$$\text{令 } s(u) = \ln u - \frac{2}{u} - 1, \text{ 则 } s'(u) = \frac{1}{u} + \frac{2}{u^2} > 0$$

$\therefore s(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\because s(\sqrt{2}e) = \ln\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{e} < \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} < 0, s(e^2) = 1 - \frac{2}{e^2} > 0,$$

故 $\exists u_0 \in (\sqrt{2}e, e^2)$, 使得 $s(u_0) = 0$,

即当 $u > u_0 > \sqrt{2}e$ 时, $s(u) > 0$, 即 $\ln u - \frac{2}{u} - 1 > 0$ 成立,

此时 $\sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{2}e$, 即有 $x_1 x_2 > 2e^2$.

【点睛】难点点睛：本题考差了导数知识的综合应用，综合性强，计算量大；难点在于结合函数的零点证

明不等式问题，解答时要根据 $f(x_1) = f(x_2) = 0, (0 < x_1 < x_2)$ 推出 $\ln x_1 + \ln x_2 - 2 \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{x_2}{x_1} + 1}{\frac{x_2}{x_1} - 1} \ln \frac{x_2}{x_1}$,

结合换元，证明 $\ln x_1 + \ln x_2 - 2 \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 2$ ，继而构造函数，判断其单调性，结合零点存在定理推出

$\sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{2}e$ ，从而证明结论.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线