# 数学参考答案及解析

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | D | B | B | C | C | D | A | ACD | ABD | ACD | BC |

1.C【解析】$z=\frac{i-3}{i+1}=\frac{(i-3)(1-i)}{(i+1)(1-i)}=\frac{i-3+3i+1}{2}=-1+2i$ 故 $z$ 的虚部为 2，故选 C.

2.D【解析】$A=\left\{x\middle|-x^2+x+2>0\right\}=(-1,2)$，$B=\left\{x\middle|x^2+2x-3<0\right\}=(-3,1)$，

则 $A\cap B=(-1,1)$，故选 D.

3.B【解析】$p\Leftrightarrow a=0$ 或 2，显然为必要不充分条件，故选 B.

4.B【解析】由题意可知，该同学在 B 等级，在 B 等级中位于 $\frac{15}{35}$ 的位置得分为 $85-\frac{15}{35}\times15\approx79$，故选 B.

5.C【解析】$g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\ 2x$，

所以 $f(x)+g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\ 2x=\sin\ 2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}-\cos\ 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f(x)+g(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.故选 C.

6.C【解析】令 $y=2$，$f(x+2)=f(x)+f(2)+4x+1$；令 $x=0$，$y=0$，$f(0)=2f(0)+1\Rightarrow f(0)=-1$；
$f(0)=f(-2)+f(2)-8+1\Rightarrow f(2)=5$，

由上式可得 $f(x+2)-f(x)=4x+6$，令 $x=2n$，$f(2n+2)-f(2n)=8n+6$，

累加得 $f(2n)=4n^2+2n-1$.故选 C.

7.D【解析】假设 $M(x_0,x_0+4)$，则切点弦 $AB$ 的方程为 $y(x_0+4)=2(x+x_0)$，整理得 $(y-2)x_0=2x-4y$，

因此 $AB$ 恒过（4,2），故距离最大值为 $\sqrt{(4-3)^2+(4-2)^2}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.故选 D.

8.A【解析】$e^x+a\ln\left(\frac{1}{ax+a}\right)-a>0$ 可变形为 $\frac{e^x}{a}-\ln(x+1)-\ln a-1>0$，

$e^{x-\ln a}+x-\ln a>\ln(x+1)+x+1$，令 $h(t)=e^t+t$，则 $h'(t)=e^t+1>0$，所以 $h(t)$ 单调递增，不等式可化为

$h(x-\ln a)>h(\ln(x+1))$，所以 $x-\ln a>\ln(x+1)$，所以 $\ln a<\left[x-\ln(x+1)\right]_{\min}=1$，所以 $0<a<1$.故选 A.

9.ACD【解析】$\because \frac{m}{\sqrt{m^2+3}}=\frac{1}{2}$ $\therefore m=1$，$\therefore$A 正确；

$\therefore a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{5}$，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\therefore$B 错误；

$C$ 的右顶点为（2,0）在 $y=\ln(x-1)$ 上，C 正确；

$y^2-\frac{x^2}{4}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，D 正确.故选 ACD .

10. ABD【解析】A.当 $a_n$，$b_n$ 为同一常数列时，$a_n=b_n$，此时 $d=0$，$q=1$，$a_1=b_1\neq 0$；

B.由等差数列的性质可知结论成立；

C.当 $q=-1$ 且 $n$ 是偶数时不成立，因此错误；

D. $A\cdot a^{a_n}=A\cdot a^{kn+m}=A\cdot a^m\cdot(a^k)^n=b_1\cdot q^{n-1}$ 只需 $A\cdot a^m=\frac{b_1}{q}$，$a^k=q$ 则成立，因此存在. 故选 ABD.

11. ACD【解析】直三棱柱中 $BB_1\perp$ 面 $ABC$，故 A 正确；

当 $AA_1=1$ 时，过 $A_1$ 作 $A_1H\perp AC_1$，垂足为 $H$，则 $\sin\theta=\frac{A_1H}{AA_1}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故 B 错误；

当 $AA_1=2$ 时，$\because B_1K\perp BC_1$，$AB\perp B_1K$，$AB\cap BC_1=B$，$\therefore B_1K\perp$ 平面 $ABC_1$，因为 $B_1K\subset$ 平面 $A_1B_1K$，故平面 $A_1B_1K\perp$ 平面 $ABC_1$，故 C 正确；

若 $BC_1\perp AC$，则 $BC_1\perp A_1C_1$，与 $A_1C_1\perp A_1B$ 矛盾.故 D 正确.故选 ACD.

12.BC【解析】对于 A，因为 $\sin B=\sqrt{3}\sin C$，所以由正弦定理得，$b=3c$，若 $a$ 是直角三角形的斜边，则有 $b^2+c^2=a^2$，即 $3c^2+c^2=4$，得 $c=1$，所以 A 错误；

对于 B，以 $BC$ 的中点为坐标原点，$BC$ 所在的直线为 $x$ 轴，建立平面直角坐标系，则 $B(-1,0)$, $C(1,0)$，设 $A(m,n)$，因为 $b=\sqrt{3}c$，所以 $\sqrt{(m-1)^2+n^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(m+1)^2+n^2}$，

化简得 $(m+2)^2+n^2=3$，所以点 $A$ 在以 $(-2,0)$ 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆上运动，

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，所以 B 正确；

对于 C，由 $A=C$，可得 $a=c=2, b=\sqrt{3}c=2\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $r$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\sqrt{3}$，解得 $r=2\sqrt{3}-3$，

所以 C 正确；

对于 D，由余弦定理可得 $\begin{cases} a^2+b^2>c^2 \\ b^2+c^2>a^2 \\ c^2+a^2>b^2 \end{cases}$，因为 $a=2$，$b=\sqrt{3}c$，

所以 $\begin{cases} b^2+c^2>a^2 \\ c^2+a^2>b^2 \end{cases}$，即$\begin{cases} 3c^2+c^2>4 \\ c^2+4>3c^2 \end{cases}$，解得$1<c<\sqrt{2}$，所以 D 错误，故选 BC.

13.14【解析】二项式$(2x+1)^3$的展开式为$C_3^0(2x)^3+C_3^1(2x)^2+C_3^2(2x)^1+C_3^3(2x)^0$，因此

$\left(x^2+1\right)(2x+1)^3$的展开式中$x^3$项的系数为$2\cdot C_3^2+8=14$.

14.$\pm\frac{2}{3}$【解析】原式$=\dfrac{2\sin\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sqrt{2}|\sin\alpha|}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{|\sin\alpha|}=\pm\frac{2}{3}$.

15. 0【解析】$f(x)$周期为$2\pi$且为偶函数，∴ $f_4(x)$为奇函数且周期为$2\pi$，$f_4(2\pi)=f_4(0)=0$.

16.①②③【解析】①∵ $AA_1$ // 平面 $BB_1D_1D$，$EF$ 取最小值即为 $E$ 到平面 $BB_1D_1D$ 的距离，为$4\sqrt{2}$，此时 $E$、$F$ 分别为 $AA_1$，$BD_1$ 的中点.故①正确.

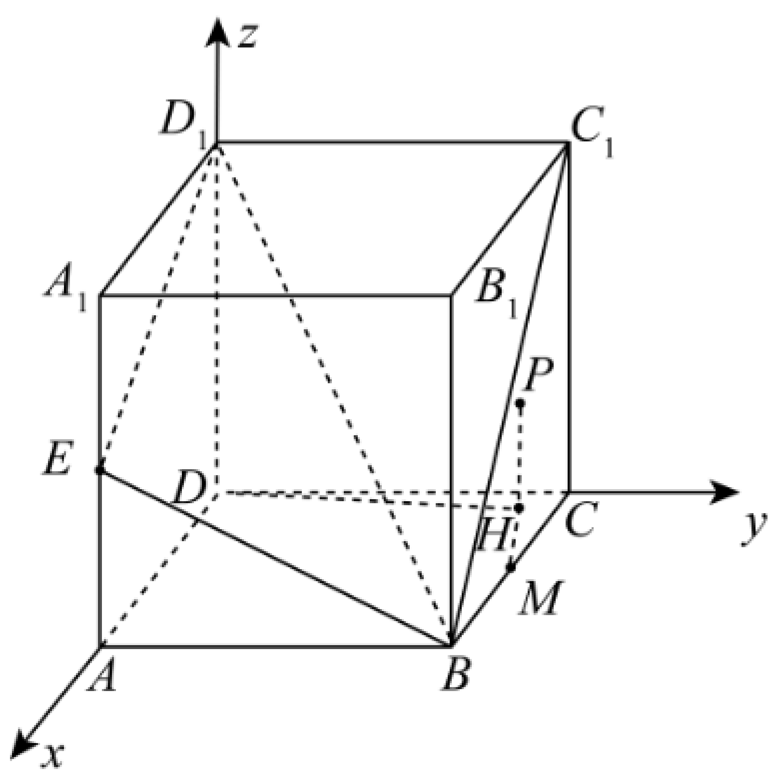
②由①知，三角形 $BED_1$ 面积的最小值为$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times8\sqrt{3}=16\sqrt{3}$，设 $D$ 到平面 $BED_1$ 的距离为 $h$，则

$\frac{1}{3}\times16\sqrt{6}\cdot h=\frac{1}{3}\times8\times8\times8\times\frac{1}{2}$，解得$h=\frac{8\sqrt{6}}{3}$.故②正确.

③建立如图所示的空间直角坐标系，则 $M(4,8,0)$，作 $PH\perp$ 平面 $ABCD$ 于点 $H$，由题意及几何关系得

$DH=3MH$，设点 $H(x,y,0)$, 则$x^2+y^2=9\left[(x-4)^2+(y-8)^2\right]$, 即点 $H$ 的轨迹方程为$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+(y-9)^2=\frac{45}{4}$，

所以点 $H$ 的轨迹长度为$2\pi\cdot\sqrt{\frac{45}{4}}=3\sqrt{5}\pi$.故③正确.




17. 【解析】(1) ∵ $a_5=5, S_7=28$,

∴$\begin{cases} a_1+4d=5 \\ 7a_1+\frac{7\times6}{2}d=28 \end{cases}$，……………………………………2 分

解得∴$\begin{cases} a_1=1 \\ d=1 \end{cases}$，……………………………………3 分

$\therefore a_n=1+(n-1)\times 1=n$ ........................................................................................................................4 分

**备注：其他解法正确也给分。**

（2）当 $n=1$ 时，$b_1=T_1=2$，

当 $n\geq 2$ 时，$b_n=T_n-T_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，

综上得，$b_n=\begin{cases}2,n=1\\2^{n-1},n\geq 2\end{cases}$ ........................................................................................................5 分

令 $c_n=a_n\cdot b_n$，则当 $n=1$ 时，$c_1=a_1\cdot b_1=2$，

当 $n\geq 2$ 时，设 $L_n=c_1+c_2+\ldots+c_n=2+2\times 2^1+3\times 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}$，

$2L_n=2\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\ldots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$，........................................................................7 分

所以 $-L_n=2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=(1-n)\cdot 2^n-2$，

所以 $L_n=(n-1)\cdot 2^n+2$ ..............................................................................................................9 分

当 $n=1$ 时，$L_1=c_1=2$ 满足上式，

综上，$L_n=(n-1)\cdot 2^n+2$ ..........................................................................................................10 分

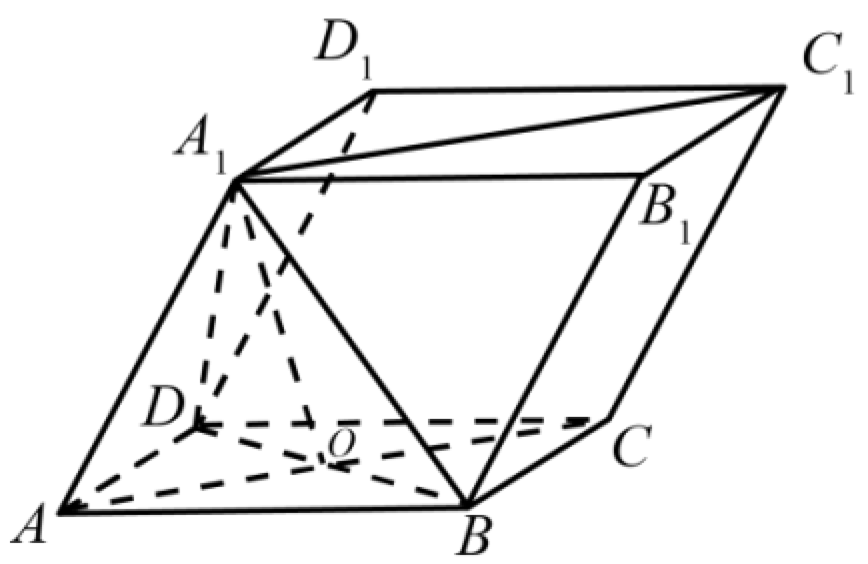
**备注：未验证 n=1 的情况，扣 1 分。**

18.【解析】（1）在底面 $ABCD$ 中，$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形且 $AB=AD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore AC\perp BD$，........................................................................................................................1 分

连接 $A_1B$，$A_1D$，设 $AC$ 与 $BD$ 交于点 $O$，连接 $A_1O$，



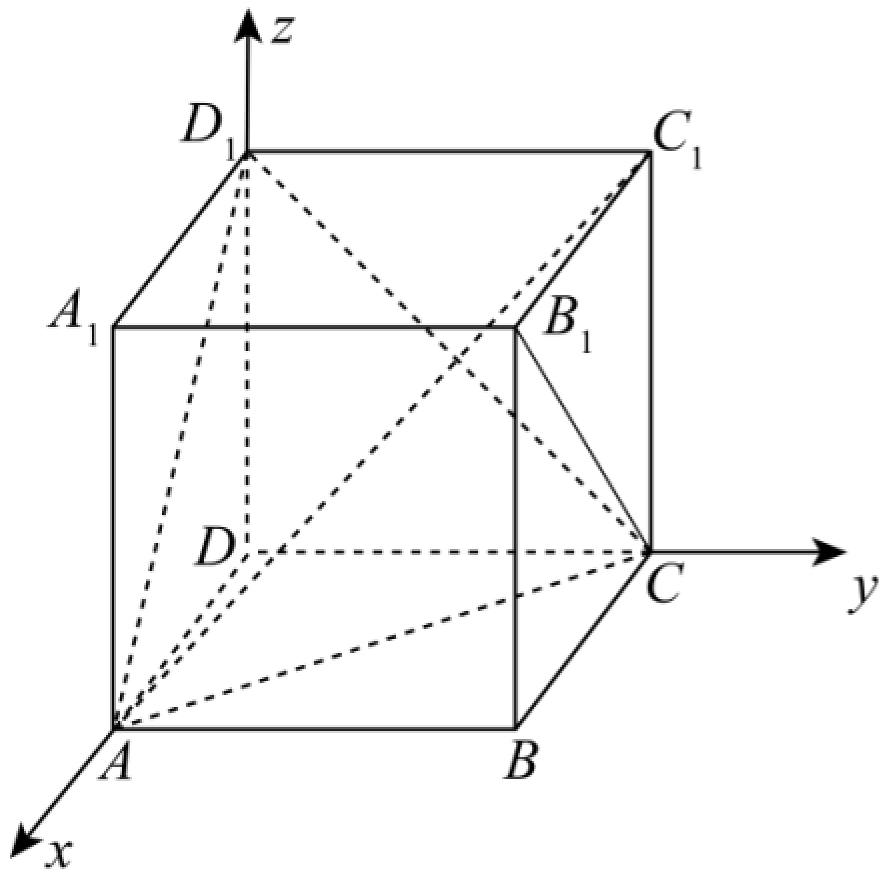

易证明$\triangle A_1AB\cong\triangle A_1AD$，$\therefore A_1B=A_1D$，$\therefore A_1O\perp BD$，...........................................................3 分

因为 $AC\cap A_1O=O$，所以 $BD\perp$ 平面 $A_1ACC_1$..........................................................................4 分

（2）设平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V$，

所以 $V_{A-B_1CD_1}=V-V_{A_1-B_1AD_1}-V_{C-B_1CD_1}-V_{B-AB_1C}-V_{B-AB_1C}$，

所以$V_{A-B_1CD_1}=V-4\times\frac{1}{6}V=\frac{1}{3}V$，




所以三棱锥$A-B_1CD_1$的体积最大即为平行六面体的体积最大，……6 分

设$\angle BAD=\alpha$，$AA_1$与面$ABCD$夹角为$\beta$，

则$V=2\times2\times2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$，所以当$\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$时，$V$取得最大值，

此时平行六面体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 为正方体……7 分

此时以$D$为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为$x$轴正方向，由$\overrightarrow{DC}$ 方向为$y$轴正方向，$\overrightarrow{DD_1}$方向为$z$轴正方向，建立空间直角坐标系，

$D_1(0,0,2),A(2,0,0),C(0,2,0),B_1(2,2,2)$，

所以$\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，

设$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$为平面$ACD_1$的法向量，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2x_1+2y_1=0\\-2x_1+2z_1=0\end{cases}$，令$x_1=1$，则$y_1=1,z_1=1$，$\vec{m}=(1,1,1)$……9 分

设$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$为平面$ACB_1$的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2x_2+2y_2=0\\2y_2+2z_2=0\end{cases}$，令$x_2=1$，则$y_2=1,z_2=-1$，

$\vec{n}=(1,1,-1)$……10 分

所以$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1+1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$，……11 分

由图知二面角$D_1-AC-B_1$为锐二面角，

所以二面角$D_1-AC-B_1$的余弦值为$\frac{1}{3}$……12 分

19. 【解析】（1）设事件 $A$ :该参赛者答对 $A$ 题目；事件 $B$：该参赛者答对 $B$ 题目；事件 $C$：该参赛者答对 C 题目，$\therefore P(A)=\frac{2}{3}$， $P(B)=\frac{1}{3}$， $P(C)=\frac{1}{3}$，

事件 D：该参赛者恰好答对 2 道题目.

$P(D)=P\left(AB\bar{C}\right)+P\left(A\bar{B}C\right)+P\left(\bar{A}BC\right)$ ............2 分

$=P(A)P(B)P\left(\bar{C}\right)+P(A)P\left(\bar{B}\right)P(C)+P\left(\bar{A}\right)P(B)P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$ ............4 分

（2）设该参赛者最终累计得分为 $\xi$，$\xi$ 可能的取值为 0、1、2、3、4、5， ............5 分

$P(\xi=0)=P\left(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$，

$P(\xi=1)=P\left(A\bar{B}\bar{C}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$，

$P(\xi=2)=P\left(\bar{A}B\bar{C}\right)+P\left(\bar{A}\bar{B}C\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，

$P(\xi=3)=P\left(AB\bar{C}\right)+P\left(A\bar{B}C\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$，

$P(\xi=4)=P\left(\bar{A}BC\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$，

$P(\xi=5)=P(ABC)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$ ............9 分

所以分布列为

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{4}{27}$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{4}{27}$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{2}{27}$ |

............10 分

$E(\xi)=0\times\frac{4}{27}+1\times\frac{8}{27}+2\times\frac{4}{27}+3\times\frac{8}{27}+4\times\frac{1}{27}+5\times\frac{2}{27}=2$ ............12 分

20.【解析】（1）∵$AC$ 平分 $\angle BAD$，∴$\angle BAC=\angle CAD$，

∴$BC=CD=2$， ............1 分

∵四点共圆，∴$\cos\angle BAD+\cos\angle BCD=0$，

由余弦定理得 $\frac{4+9-BD^2}{2\times2\times3}=-\frac{4+4-BD^2}{2\times2\times2}$， ............3 分

解得 $BD=\sqrt{10}$ ............4 分

（2）$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\angle CAD-\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\angle BAC$ ............7 分

$=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{CD}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}-\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\left|\overrightarrow{CD}\right|^2}{2}$，

............10 分

由圆周角定理得 $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CD}|$，......11 分

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}=\dfrac{5}{2}$......12 分

21.【解析】(1) 设 $H(x,y)$，$M(x_0,y_0)$，

由题意得 $\begin{cases}x=x_0\\ y=\dfrac{y_0}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_0=x\\ y_0=2y\end{cases}$，......2 分

由 $M$ 在圆 $x^2+y^2=4$，得 $x^2+4y^2=4$，即 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

$\therefore$ 点 $H$ 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$......4 分

(2) 当 $PQ$ 斜率不存在时，$P(0,1),Q(0,-1),B(0,0)$，

此时 $\overrightarrow{PA}=\left(0,-\dfrac{1}{2}\right),\overrightarrow{PB}=(0,-1),\overrightarrow{QA}=\left(0,\dfrac{3}{2}\right),\overrightarrow{QB}=(0,1)$，

所以 $\overrightarrow{PA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB},\overrightarrow{QA}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{QB}$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{3}{2}$，

所以 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$......6 分

当 $PQ$ 斜率存在时，设直线 $PQ$ 的方程为 $y=kx+\dfrac{1}{2}(k\neq0)$，令 $y=0$，$B\left(-\dfrac{1}{2k},0\right)$，$P(x_1,y_1)$ $Q(x_2,y_2)$，

$\because$ $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$-x_1=\lambda\left(-\dfrac{1}{2k}-x_1\right)$，

$\therefore\dfrac{1}{\lambda}=1+\dfrac{1}{2kx_2}$，

同理 $\dfrac{1}{\mu}=1+\dfrac{1}{2kx_2}$，......8 分

$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=2+\dfrac{x_1+x_2}{2kx_1\cdot x_2}$，......9 分

由 $\begin{cases}y=kx+\dfrac{1}{2}\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+4kx-3=0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{4k}{4k^2+1},x_1\cdot x_2=-\dfrac{3}{4k^2+1}$，所以 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=2+\dfrac{x_1+x_2}{2kx_1\cdot x_2}=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$......11 分

综上，$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{8}{3}$......12 分

22.【解析】(1) 令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\ln x+ax^2-a(x>0)$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax$，

当 $a\geq0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增......2 分

当 $a<0$ 时，令 $h'(x)=0$，得 $x=\sqrt{-\frac{1}{2a}}$，

当 $x\in\left(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)$上单调递增；

当 $x\in\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递减……………………………………………………4 分

（2）若 $f(x)\ge g(x)$ 恒成立，则 $f(x)-g(x)\ge 0$，

令 $F(x)=f(x)-g(x)=x\ln x-\left(2x-e^{x-1}-1\right)+a\left(x^3-x\right)$，

易得 $F(1)=0$，所以 $x=1$ 是 $F(x)$ 的极小值点，

所以 $F'(1)=0$，

由 $F'(x)=1+\ln x-\left(2-e^{x-1}\right)+3ax^2-a$，

所以 $F'(1)=2a=0$，所以 $a=0$ ……………………………………………………………………6 分

现证明 $a=0$ 时 $F(x)\ge 0$ 恒成立，

令 $p(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，则 $p'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，令 $p'(x)=0$，得 $x=1$，

所以 $p(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $p(x)\ge p(1)=0$，

所以 $\ln x\ge 1-\frac{1}{x}$ ……………………………………………………………………8 分

令 $q(x)=e^{x-1}-x$，则 $q'(x)=e^{x-1}-1$，令 $q'(x)=0$，得 $x=1$，

所以 $q(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $q(x)\ge q(1)=0$，

所以 $e^{x-1}\ge x$ ……………………………………………………………………10 分

所以 $x\ln x\ge x\left(1-\frac{1}{x}\right)=x-1=2x-x-1\ge 2x-e^{x-1}-1$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立.

所以 $a=0$ 满足题意……………………………………………………………………12 分