2024年1月“七省联考”押题预测卷03

数　学

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

注意事项：

1．本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第I卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第II卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\left\{x\middle|(3x-4)(x-5)\le 0\right\}$，$B=\left\{x\middle|2x<8\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-\infty,5]$　　B. $\left[\frac{4}{3},5\right]$　　C. $\left[\frac{3}{4},4\right)$　　D. $\left[\frac{4}{3},4\right)$

2．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$\sin x=1$”是“$\cos x=0$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3．已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{b}=\left(\sqrt{3},1\right)$，$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$，若 $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{a}$，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为（　　）

A. $\frac{1}{4}\vec{b}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{b}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$　　D. $\vec{b}$

4．形如 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ 我们称为“二阶行列式”，规定运算 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$，若在复平面上的一个点 A 对应复数为 z，其中复数 z 满足 $\begin{vmatrix}z & 1-\mathrm{i}\\ 1+2\mathrm{i} & 1\end{vmatrix}=\mathrm{i}$，则点 A 在复平面内对应坐标为（　　）

A. $(3,2)$　　B. $(2,3)$　　C. $(-2,3)$　　D. $(3,-2)$

5．已知圆 $C_1:x^2+y^2+4x+3=0$，圆 $C_2:x^2+y^2-8x+12=0$，下列直线中不能与圆 C_1，C_2 同时相切的是（　　）

A. $\sqrt{3}x+3y=0$　　B. $\sqrt{3}x-3y=0$

C. $x+\sqrt{35}y+8=0$　　D. $x-\sqrt{35}y-8=0$

6．若函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $(0,\pi)$ 内恰好存在 4 个 x_0，使得 $f(x_0)=1$，则 ω 的取

值范围为（　　）

A. $\left[\frac{19}{6},\frac{9}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{19}{6},\frac{9}{2}\right]$　　C. $\left[\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right]$

7．净水机通过分级过滤的方式使自来水逐步达到纯净水的标准，其工作原理中有多次的PP棉滤芯过滤，其中第一级过滤一般由孔径为5微米的PP棉滤芯（聚丙烯熔喷滤芯）构成，其结构是多层式，主要用于去除铁锈、泥沙、悬浮物等各种大颗粒杂质，假设每一层PP棉滤芯可以过滤掉三分之一的大颗粒杂质，若过滤前水中大颗粒杂质含量为80mg/L，现要满足过滤后水中大颗粒杂质含量不超过2mg/L，则PP棉滤芯的层数最少为（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）（　　）

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

8．设$a=\frac{1}{5}\cos\frac{1}{5}$，$b=\sin\frac{1}{5}$，$c=\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　　）．

A. $b<a<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $a<b<c$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．下列说法正确的是（　　）

A. 已知随机变量ξ服从二项分布：$\xi\sim B\left(8,\frac{3}{4}\right)$，设$\eta=2\xi+1$，则$\eta$的方差$D(\eta)=3$

B. 数据$1,3,5,7,9,11,13$的第60百分位数为9

C. 若样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$的平均数为2，则$3x_1+2,3x_2+2,\cdots,3x_n+2$的平均数为8

D. 用简单随机抽样的方法从51个个体中抽取2个个体，则每个个体被抽到的概率都是$\frac{1}{51}$

10．在正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=3$，$A_1B_1=2$，$AA_1=\sqrt{2}$则（　　）

A. 该正四棱台的体积为$\frac{19\sqrt{2}}{6}$

B. 直线AA_1与底面$ABCD$所成的角为60°

C. 线段A_1C的长为10

D. 以A_1为球心，且表面积为6π的球与底面$ABCD$相切

11．已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{4}=1$，直线l：$y=kx+m(k\neq\pm 2)$与双曲线有唯一的公共点M，过点M且与l垂直的直线分别交x轴、y轴于$A(x_0,0)$，$B(0,y_0)$两点.当点M变化时，点$P(x_0,y_0)$之变化.则下列结论中正确的是（　　）

A. $k^2=m^2+4$　　B. $y_0=\frac{k}{2}x_0$

C. P点坐标可以是$(7,\sqrt{6})$　　D. $\frac{1}{{x_0}^2}-\frac{1}{{y_0}^2}$有最大值$\frac{1}{25}$

12．已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为R，它们的导函数分别为$f'(x)$，$g'(x)$，且$f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=3$，若$g(x+2)$是偶函数，则下列正确的是（　　）．

A. $g'(2)=0$

B. $f\left(x\right)$的最小正周期为 4

C. $f\left(x+1\right)$是奇函数

D. $g\left(2\right)=5$，则$\sum_{k=1}^{2024} f\left(k\right)=2024$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．二项式$(x-2)(1+x)^n$的展开式中，所有项系数和为-256，则x^2的系数为______（用数字作答）．

14. 随机变量ξ有 3 个不同的取值，且其分布列如下：

ξ	$4\sin\alpha$	$4\cos\alpha$	$2\sin 2\alpha$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	a

则$E(\xi)$的最小值为______．

15. 已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n=n\cdot 2^n$，记数列$\left\{a_n-tn\right\}$的前$n$项和为$S_n$，若$S_n\le S_{10}$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，则实数$t$的取值范围是______________．

16．已知正实数 x，y 满足$ye^x=\ln x-\ln y$，则$\frac{e^x}{x}+\ln y$的最小值为______．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．在$\triangle ABC$中，角 A，B，C的对边分别为 a，b，c，$\sin^2 A+\sin^2 B=\left(\sin C-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B\right)\sin C$．

（1）求 C;

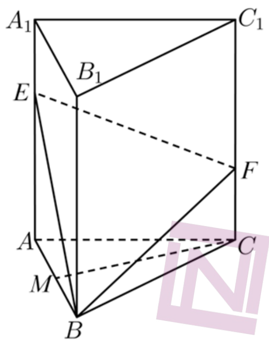
（2）若$c=2\sqrt{13}$，$a=3b$，点 D在边 AB上，且$\angle ACD=\angle BCD$，求 CD的长．

18．已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且满足$S_n=\frac{n+1}{2}a_n$，$a_1=1$．

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式;

（2）设数列$\left\{b_n\right\}$满足$b_n=\begin{cases}2^{a_n}, n\text{为偶数}\\ \frac{a_n+2}{a_n}+\frac{a_n}{a_n+2}-2, n\text{为奇数}\end{cases}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前$2n$项和$T_{2n}$．

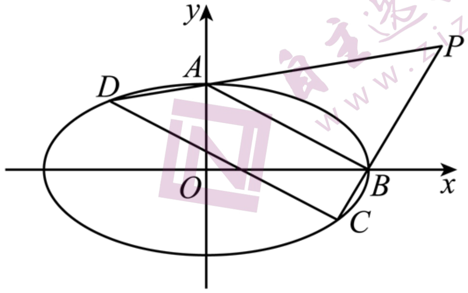
19．如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$CA=CB$，E，F 分别是棱 AA_1,CC_1 上的点，平面 $BEF\perp$ 平面 ABB_1A_1，M 是 AB 的中点．



（1）证明：$CM//$ 平面 BEF；
（2）若 $AC=AE=2$，求平面 BEF 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值．

20．在一个抽奖游戏中，主持人从编号为 $1,2,3,4$ 的四个外观相同的空箱子中随机选择一个，放入一件奖品，再将四个箱子关闭.主持人知道奖品在哪个箱子里.游戏规则是主持人请抽奖人在这四个箱子中选择一个，若奖品在此箱子里，则奖品由获奖人获得.现有抽奖人甲选择了 2 号箱，在打开 2 号箱之前，主持人先打开了另外三个箱子中的一个空箱子.按游戏规则，主持人将随机打开甲的选择之外的一个空箱子.
（1）计算主持人打开 4 号箱的概率；
（2）当主持人打开 4 号箱后，现在给抽奖人甲一次重新选择的机会，请问他是坚持选 2 号箱，还是改选 1 号或 3 号箱？（以获得奖品的概率最大为决策依据）

21．已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，椭圆上有四个动点 A，B，C，D，$CD//AB$，AD 与 BC 相交于 P 点．如图所示．



（1）当 A，B 恰好分别为椭圆的上顶点和右顶点时，试探究：直线 AD 与 BC 的斜率之积是否为定值？若为定值，请求出该定值；否则，请说明理由；

（2）若点 P 的坐标为 $\left(8,6\right)$，求直线 AB 的斜率.

22．已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$，$g\left(x\right)=ax^{2}+x$.

（1）当 $a=1$ 时，求证：$f\left(x\right)\le g\left(x\right)$；

（2）当 $x>-1$ 时，$f\left(x\right)\le g\left(x\right)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（3）已知 $n\in N^{+}$，证明：$\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{2n}<\ln 2$.