肇庆市 2024 届高中毕业班第二次教学质量检测
答案及评分标准(参考)　数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	C	A	B	C	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	9	10	11	12
答案	AC	AD	BC	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 60　14. $\frac{1}{8}$　15. $\frac{6}{7}$　16. $\frac{\sqrt{3}}{3}$(2 分)　$\frac{16\pi}{3}$(3 分)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17. (10 分)

解：(1)方法一：假设存在 λ，使 $\{b_n-\lambda\}$ 为等比数列，则至少满足 $\{b_n-\lambda\}$ 的前 3 项成等比数列. $\{b_n-\lambda\}$ 的前 3 项为 $b_1-\lambda=5-\lambda$，$b_2-\lambda=17-\lambda$，$b_3-\lambda=65-\lambda$，…… 1 分

则 $(5-\lambda)(65-\lambda)=(17-\lambda)^2$，…… 2 分

解得 $\lambda=1$. …… 3 分

以下证明：当 $\lambda=1$ 时，$\{b_n-1\}$ 为等比数列.

由 $b_n=2^{2n}+1=4^n+1$，得 $b_n-1=4^n$. …… 4 分

因为 $\frac{b_n-1}{b_{n-1}-1}=4(n\geqslant 2)$ 是非零常数，且 $b_1-1=4$，所以 $\{b_n-1\}$ 为首项为 4，公比为 4 的等比数列. …… 5 分

方法二：猜想 $\lambda=1$ 时，$\{b_n-1\}$ 为等比数列. …… 1 分

由 $b_n=a_{2n}+1$，得 $b_n=2^{2n}+1=4^n+1$，故 $b_n-1=4^n$. …… 3 分

因为 $\frac{b_n-1}{b_{n-1}-1}=4(n\geqslant 2)$ 是非零常数，且 $b_1-1=4$，所以 $\{b_n-1\}$ 为首项为 4，公比为 4 的等比数列. …… 5 分

(2)由(1)得 $b_n-1=4^n$，所以 $b_n=4^n+1$，…… 6 分

所以 $S_n=\frac{4-4^n\cdot 4}{1-4}+n$

$=\frac{4^{n+1}-4}{3}+n$. …… 10 分

18. (12 分)

方法一：解：(1)设 $\angle BAC=2\theta$，则 $\angle BAD=\angle CAD=\theta$.

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，得 $\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\theta+\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\theta=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 2\theta$，…… 1 分

所以$\frac{1}{2}\times 2\times 1\times \sin\theta+\frac{1}{2}\times 4\times 1\times \sin\theta=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times \sin 2\theta$，得 $\cos\theta=\frac{3}{8}$， ……… 3 分

故 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\theta=2^2+1^2-2\times 1\times 2\times\frac{3}{8}=\frac{7}{2}$， ……………………… 5 分

所以 $BD=\frac{\sqrt{14}}{2}$. …………………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $\cos\theta=\frac{3}{8}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{8}$， ………………… 8 分

所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{55}}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{3\sqrt{55}}{32}$， ………………………………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 2\theta=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{3\sqrt{55}}{32}=\frac{3\sqrt{55}}{8}$. ……………………… 12 分

方法二：(1)证明：由角平分线定理知$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，不妨设 $BD=x$，则 $DC=2x$.

……………………………………………………………………………………… 2 分

由$\angle BAD=\angle CAD$ 可知 $\cos\angle BAD=\cos\angle CAD$， …………………………………… 3 分

即$\frac{1^2+2^2-x^2}{2\times 1\times 2}=\frac{1^2+4^2-(2x)^2}{2\times 1\times 4}$，解得 $x=\frac{\sqrt{14}}{2}$(负值舍去)，即 $BD=\frac{\sqrt{14}}{2}$. ………… 6 分

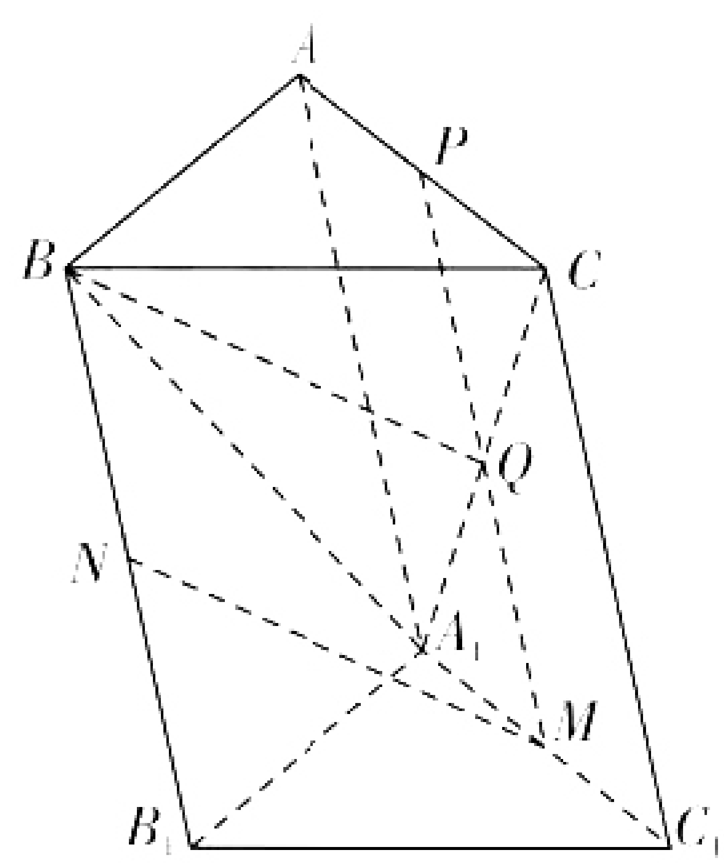
(2)解：由(1)知 $BC=3x=\frac{3\sqrt{14}}{2}$.

在$\triangle ABC$ 中，$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{4+16-\left(\frac{3\sqrt{14}}{2}\right)^2}{2\times 2\times 4}=-\frac{23}{32}$， ……………… 8 分

$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\left(-\frac{23}{32}\right)^2}=\frac{3\sqrt{55}}{32}$， ………………………………………………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{3\sqrt{55}}{32}=\frac{3\sqrt{55}}{8}$. ……………………… 12 分

19. (12 分)



方法一：(1)证明：如图，取 AC 的中点 P，连接 MP 交 A_1C 于点 Q，连接 QB.

因为 M 是 A_1C_1 的中点，N 是 BB_1 的中点，

所以 $BN/\!/AA_1/\!/PM$，$BN=QM$，所以四边形 $MNBQ$ 是平行四边形，所以 $QB/\!/MN$.

又 $QB\subset$平面 A_1BC，$MN\not\subset$平面 A_1BC，

所以 $MN/\!/$平面 A_1BC. ……………………………………………… 4 分

(2)解：因为 $AB\perp AC$，平面 $ACC_1A_1\perp$平面 ABC，平面 $ACC_1A_1\cap$平面 $ABC=AC$，$AB\subset$平面 ABC，所以 $AB\perp$平面 ACC_1A_1，所以直线 A_1B 与平面 ACC_1A_1 所成的角为$\angle AA_1B$，则 $\sin\angle AA_1B=\frac{2}{3}$.

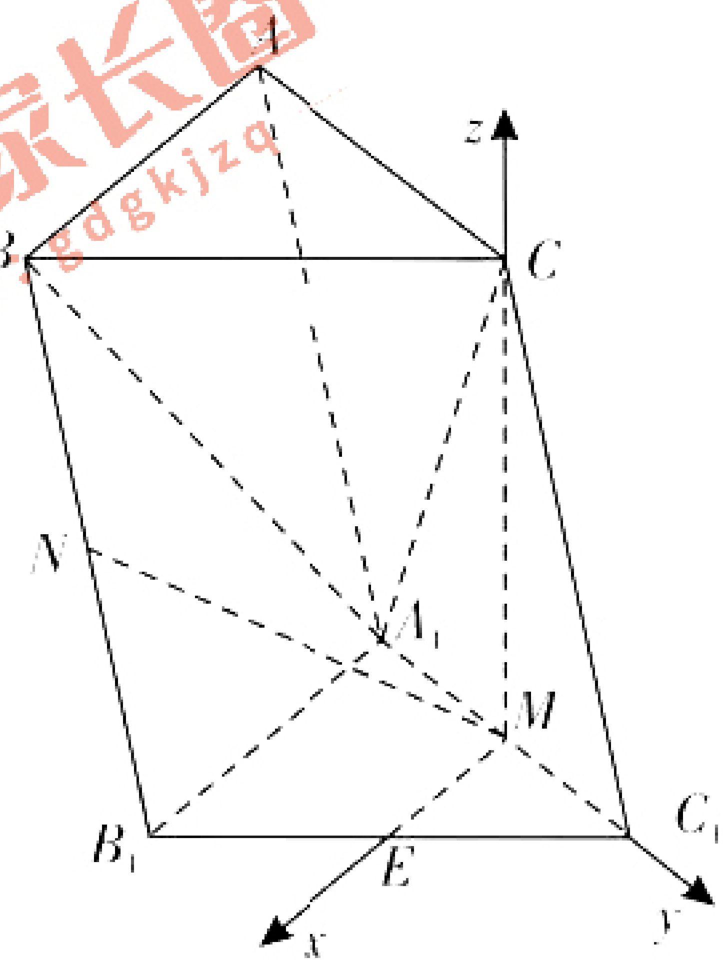
不妨设 $AB=AC=2$，则 $A_1B=3$，$AA_1=\sqrt{5}$，连接 CM.

因为 $AA_1=A_1C=CC_1$，所以 $CM\perp A_1C_1$.

又平面 ABC//平面 $A_1B_1C_1$，所以平面 $ACC_1A_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$，

且平面 $ACC_1A_1\cap$平面 $A_1B_1C_1=A_1C_1$，$CM\subset$平面 ACC_1A_1，故 $CM\perp$平面 $A_1B_1C_1$. …… 6 分

设 B_1C_1 的中点为 E，连接 ME，以 M 为坐标原点，ME，MC_1，MC 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图，



则 $A_1(0,\ -1,\ 0)$，$B(2,\ -2,\ 2)$，$C(0,\ 0,\ 2)$，$B_1(2,\ -1,\ 0)$，$C_1(0,\ 1,\ 0)$，

故$\overrightarrow{A_1B}=(2,\ -1,\ 2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,\ 2,\ 0)$.

设平面 A_1BC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1B}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2x-y+2z=0,\\ -2x+2y=0,\end{cases}$ 不妨取 $x=2$，

则有 $\boldsymbol{n}=(2,\ 2,\ -1)$.

易知平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,\ 0,\ 1)$. … 10 分

设平面 A_1BC 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{3}$，

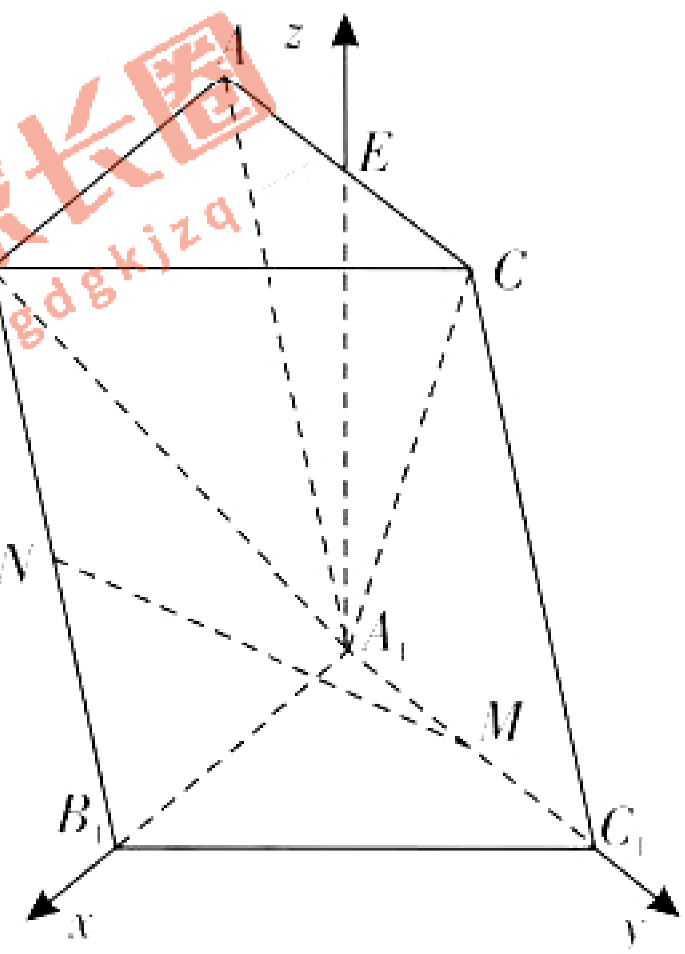
所以平面 A_1BC 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值为$\dfrac{1}{3}$. …………………………… 12 分

方法二：(1)证明：取 AC 的中点 E，连接 A_1E，易知 $A_1E\perp AC$.

因为平面 $ACC_1A_1\perp$平面 ABC，且平面 $ACC_1A_1\cap$平面 $ABC=AC$，

$A_1E\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $A_1E\perp$平面 ABC，即 $A_1E\perp$平面 $A_1B_1C_1$. ………………… 2 分

以 A_1 为坐标原点，A_1B_1，A_1C_1，A_1E 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图.



因为 $AB\perp AC$，$AB\subset$平面 ABC，

所以 $AB\perp$平面 ACC_1A_1，所以直线 A_1B 与平面 ACC_1A_1 所成的角为$\angle AA_1B$，则 $\sin\angle AA_1B=\dfrac{2}{3}$.

不妨设 $AB=AC=2$，则 $A_1B=3$，$AA_1=\sqrt{5}$，

则 $A_1(0,\ 0,\ 0)$，$B(2,\ -1,\ 2)$，$C(0,\ 1,\ 2)$，$B_1(2,\ 0,\ 0)$，

$C_1(0,\ 2,\ 0)$，…………………………………………………… 4 分

故$\overrightarrow{A_1B}=(2,\ -1,\ 2)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,\ 1,\ 2)$.

设平面 A_1BC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1B}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{A_1C}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2x-y+2z=0,\\ y+2z=0,\end{cases}$ 不妨取 $z=1$，则有 $\boldsymbol{n}=(-2,\ -2,\ 1)$.

又 $M(0,\ 1,\ 0)$，$N\left(2,\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，故$\overrightarrow{MN}=\left(2,\ -\dfrac{3}{2},\ 1\right)$，

可得$\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=0$，故$\overrightarrow{MN}\perp\boldsymbol{n}$，即 MN//平面 A_1BC. ………………………………… 6 分

(2)解：易知平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,\ 0,\ 1)$，………………………… 10 分

设平面 A_1BC 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1}}=\dfrac{1}{3}$，

所以平面 A_1BC 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$. ………………………………… 12 分

20. (12 分)

解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{x^2}=\dfrac{x-m}{x^2}$.

当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 无极值；……………… 2 分

当 $m>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=m$.

故当 $x\in(0,m)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(m,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，此时，$f(x)$ 在 $x=m$ 处取到极小值 $\ln m-m+1$，无极大值. ……………… 4 分

(2) 方法一：对任意 $0<x<1$ 时，$f(x)>-\dfrac{1}{e}$ 恒成立，即 $m>\dfrac{x\ln x+\dfrac{x}{e}}{x-1}$ 恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{x\ln x+\dfrac{x}{e}}{x-1}$，$x\in(0,1)$，则 $g'(x)=\dfrac{x-\ln x-1-\dfrac{1}{e}}{(x-1)^2}$.

令 $h(x)=x-\ln x-1-\dfrac{1}{e}$，$x\in(0,1)$，则 $h'(x)=\dfrac{x-1}{x}<0$，即 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减. …………………………………………………………………………………… 6 分

又 $h\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$，

所以当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，此时 $g(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，此时 $g(x)$ 单调递减，……………… 8 分

所以 $g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^2}}{\dfrac{1}{e}-1}=\dfrac{1}{e}$. ……………………………… 10 分

所以 $m>\dfrac{1}{e}$，即 m 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. ………………………………… 12 分

方法二：由 (1) 知 $f'(x)=\dfrac{x-m}{x^2}$，

当 $m\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增.

因为 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-1-m+me=(e-1)m-1<\dfrac{1}{e}$，所以 $m\leqslant 0$ 不符合题意. ………… 6 分

当 $0<m<1$ 时，当 $x\in(0,m)$ 时 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(m,1)$ 时 $f(x)$ 单调递增.

对任意 $0<x<1$ 时，$f(x)>-\dfrac{1}{e}$ 恒成立，即 $f(x)_{\min}=\ln m-m+1>-\dfrac{1}{e}$，

即 $\ln m-m+1+\dfrac{1}{e}>0$.

令 $g(m)=\ln m-m+1+\dfrac{1}{e}$，$m\in(0,1)$

$g'(m)=\frac{1}{m}-1=\frac{1-m}{m}>0$，$g(m)$在区间$(0,1)$上单调递增. …………………… 8 分

又$g\left(\frac{1}{e}\right)=-1-\frac{1}{e}+1+\frac{1}{e}=0$，

所以$\frac{1}{e}<m<1$. ………………………………………………………… 10 分

当$m\geq 1$时，$f'(x)=\frac{x-m}{x^2}<0$，$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递减.

所以$f(x)>f(1)=0>-\frac{1}{e}$，符合题意. ……………………………………… 11 分

综上，m的取值范围为$\left(\frac{1}{e},\ +\infty\right)$. ………………………………………… 12 分

21. (12 分)

(1)证明：设$F_2(c,0)$，因为点$P(x_0,y_0)$在C上，所以$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，故$y_0^2=b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$，

故$|PF_2|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-c)^2+b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x_0\right)^2}=|a-ex_0|$. …… 2 分

又$-a\leq x_0\leq a$，所以$-c\leq\frac{c}{a}x_0\leq c<a$，故$a-\frac{c}{a}x_0>0$，所以$|PF_2|=a-ex_0$. …… 4 分

(2)解：假设存在这样的直线l.

由(1)知$|AF_2|=a-ex_1=5-\frac{\sqrt{10}}{5}x_1$，$|BF_2|=a-ex_2=5-\frac{\sqrt{10}}{5}x_2$.

由椭圆定义知$|AF_1|=2a-|AF_2|=5+\frac{\sqrt{10}}{5}x_1$，$|BF_1|=2a-|BF_2|=5+\frac{\sqrt{10}}{5}x_2$.

因为$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{3}{|AB|}$，所以$\frac{1}{5+\frac{\sqrt{10}}{5}x_1}+\frac{1}{5+\frac{\sqrt{10}}{5}x_2}=\frac{3}{10-\frac{\sqrt{10}}{5}(x_1+x_2)}$， …… 6 分

整理得$2(x_1+x_2)^2+15\sqrt{10}(x_1+x_2)+6x_1x_2-125=0$ ①.

设l：$y=k(x-\sqrt{10})$.

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1,\\ y=k(x-\sqrt{10}),\end{cases}$ 得$(3+5k^2)x^2-10\sqrt{10}k^2x+25(2k^2-3)=0$， ………………… 8 分

所以$\Delta=(-10\sqrt{10}k^2)^2-100(2k^2-3)(3+5k^2)=900(k^2+1)>0$，且$x_1+x_2=\frac{10\sqrt{10}k^2}{3+5k^2}$，

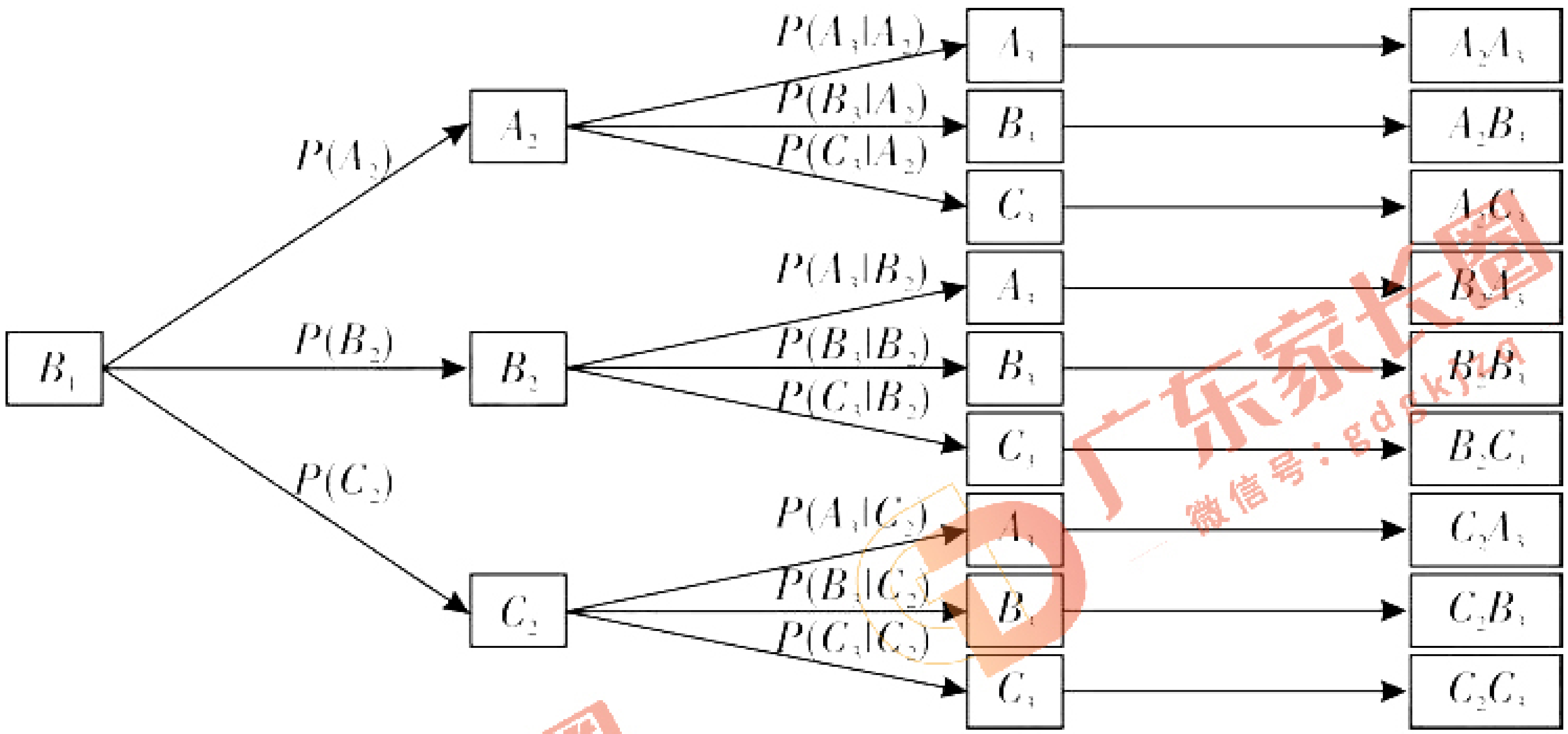
$x_1x_2=\frac{25(2k^2-3)}{3+5k^2}$，代入①式， …………………………………………………… 9 分

化简整理得$105k^4-8k^2-33=0$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………… 11 分

故直线l存在，且它的方程为$y=\frac{\sqrt{15}}{5}x-\sqrt{6}$或$y=-\frac{\sqrt{15}}{5}x+\sqrt{6}$. ………………… 12 分

22. (12 分)

(1)解：设“该市 12 月第 n 天的天气情况为晴天”为事件 A_n，“该市 12 月第 n 天的天气情况为下雨”为事件 B_n，“该市 12 月第 n 天的天气情况为阴天”为事件 C_n，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $1\leqslant n\leqslant 31$.



由图可得，$A_3=A_2A_3+B_2A_3+C_2A_3$， ………………………………………………………… 2 分

由全概率公式可得，

$$P(A_3)=P(A_2A_3)+P(B_2A_3)+P(C_2A_3)=P(A_2)P(A_3|A_2)+P(B_2)P(A_3|B_2)+P(C_2)P(A_3|C_2)$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\right)\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}.$$

故该市 12 月第 3 天的天气情况为晴天的概率为$\frac{5}{16}$. ……………………………… 4 分

(2)证明：记 $a_n=P(A_n)$，$b_n=P(B_n)$，$c_n=P(C_n)$，$a_1=0$，$a_2=\frac{1}{4}$.

由(1)可得 $A_{n+1}=A_nA_{n+1}+B_nA_{n+1}+C_nA_{n+1}$，

由全概率公式可得

$$a_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_nA_{n+1})+P(B_nA_{n+1})+P(C_nA_{n+1})$$

$$=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P(B_n)P(A_{n+1}|B_n)+P(C_n)P(A_{n+1}|C_n)$$

$$=a_n\times\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+b_n\times\frac{1}{4}+c_n\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n,$$

即 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n$ ①.

同理可得 $b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{1}{3}c_n$ ②，$c_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{5}{12}c_n$ ③，

②+③得 $b_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{4}b_n+\frac{3}{4}c_n=\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{4}(b_n+c_n)$ ④.

由①得 $b_n+c_n=4a_{n+1}-2a_n$，则 $b_{n+1}+c_{n+1}=4a_{n+2}-2a_{n+1}$，

代入④得 $4a_{n+2}-2a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{4}(4a_{n+1}-2a_n)$，即 $4a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n$， …………… 7 分

故 $4(a_{n+2}-a_{n+1})=a_{n+1}-a_n$，即 $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_{n+1}-a_n)$.

又 $a_2-a_1=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$，所以$\{a_{n+1}-a_n\}$是以$\frac{1}{4}$为首项，$\frac{1}{4}$为公比的等比数列， … 9 分

所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_2-a_1=\left(\frac{1}{4}\right)^1$，$a_3-a_2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$，$a_4-a_3=\left(\frac{1}{4}\right)^3$，…，$a_n-a_{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，

累加得 $a_n-a_1=\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$.

又 $a_1=0$，所以 $a_n=\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$.

又当 $n=1$ 时，$a_1=0$ 也满足上式，所以 $a_n=\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$. ························ 12 分