

数 学

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 4, 5, 7\}$, 则
 - A. $A \cap B = \emptyset$
 - B. $A \subseteq B$
 - C. $A \cup B = A$
 - D. $5 \in A \cup B$
2. 命题“ $\forall x > 0, x^2 > 0$ ”的否定是
 - A. $\forall x > 0, x^2 \leq 0$
 - B. $\forall x \leq 0, x^2 > 0$
 - C. $\exists x > 0, x^2 \leq 0$
 - D. $\exists x \leq 0, x^2 > 0$
3. $\cos 330^\circ =$
 - A. $\frac{1}{2}$
 - B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - C. $-\frac{1}{2}$
 - D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. “两个三角形全等”是“两个三角形的周长相等”的
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充要条件
 - D. 既不充分也不必要条件
5. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{x}$ 图象的对称中心是
 - A. (1, 0)
 - B. (0, 1)
 - C. (-1, 0)
 - D. (0, -1)

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$. 若

$f(a) \geq f(1)$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(1, +\infty)$
- B. $[1, +\infty)$
- C. $(-\infty, 1)$
- D. $(-\infty, 1]$

7. 已知 $a = 0.9^{1.1}$, $b = \log_2 3$, $c = \log_3 4$, 则

- A. $a < c < b$
- B. $a < b < c$
- C. $c < b < a$
- D. $b < c < a$

8. 函数 $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \ln x$ 的零点个数是

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 下列命题为真命题的是

- A. 若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$
- B. 若 $a > b, c > d$, 则 $a - d > b - c$
- C. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- D. 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $ac > bd$

10. 下列四个函数中,以 π 为最小正周期,且为奇函数的是

- A. $y = \tan x$
- B. $y = \sin x$
- C. $y = \cos 2x$
- D. $y = \sin 2x$

11. 已知函数 $f(x) = \log_2(1-x) + \log_2(1+x)$, 则

- A. $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$
- B. $f(x)$ 为偶函数
- C. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增
- D. $f(x)$ 的最大值是 0

12. 已知 x 为实数, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,例如, $[-3.5] = -4$, $[2.1] = 2$. 则

- A. $[2x] = 2[x]$
- B. $[x] \leq x < [x+1]$
- C. $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$
- D. $x^2 + \frac{1}{4} > [x]$

第Ⅱ卷(非选择题,共90分)

三、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.把答案填在答题卡上.

13. $4^{\frac{3}{2}} - 3^{\log_3 2}$ 的值是_____.

14. 若 $\tan\theta = \frac{4}{3}$, 则 $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ 的值是_____.

15. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,且 $f(x+1)$ 是偶函数.若 $f(1)=2$, 则 $f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ 的值是_____.

16. 若关于 x 的方程 $(\frac{1}{x}-1)^2 - a|\frac{1}{x}-1| + \frac{1}{4} = 0$ 恰好有四个不同的实数根,则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分)

已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x^2-4x+3<0\}$, $B=\{x|x>a\}$.

(I) 当 $a=2$ 时,求 $A\cap B, A\cup(\complement_U B)$;

(II) 若 $A\subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分12分)

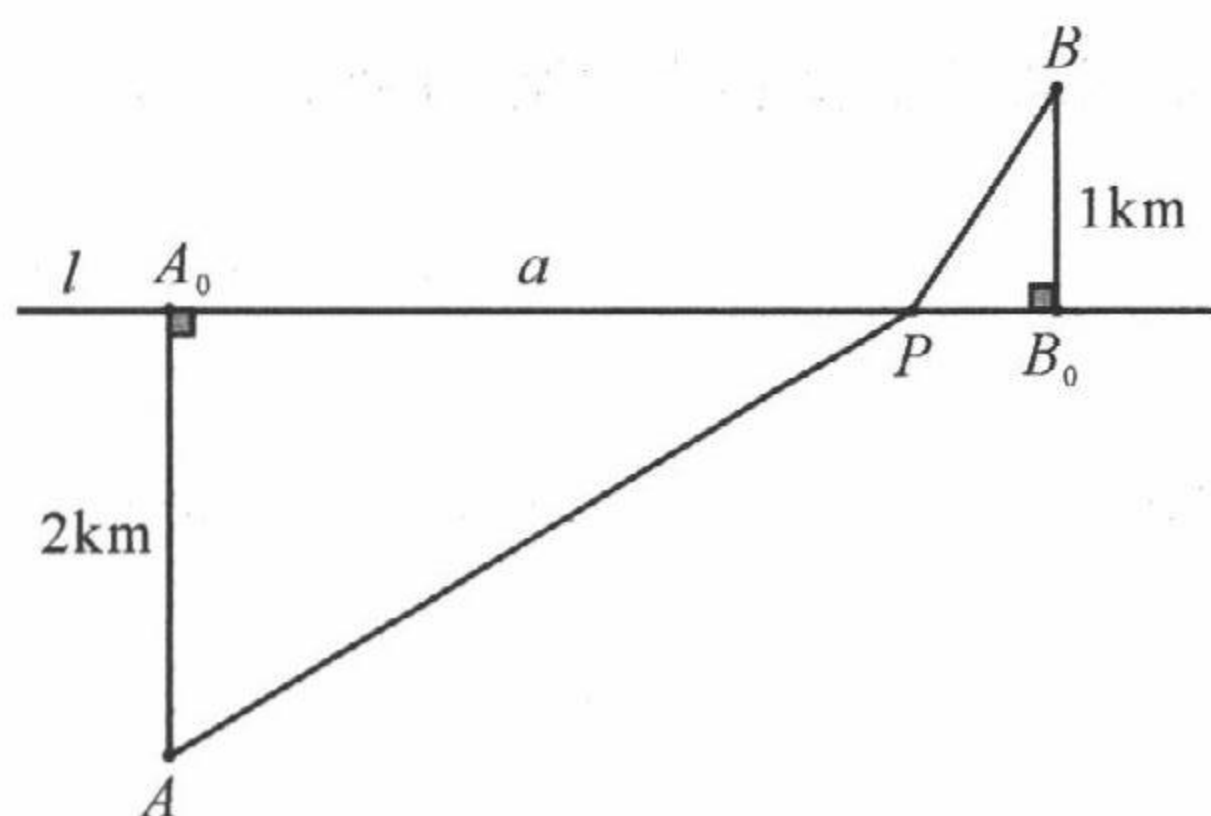
已知函数 $f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的值域.

19. (本小题满分12分)

如图所示,一条笔直的河流 l (忽略河的宽度)两侧各有一个社区 A, B (忽略社区的大小), A 社区距离 l 上最近的点 A_0 的距离是 2km , B 社区距离 l 上最近的点 B_0 的距离是 1km , 且 $A_0B_0=4\text{km}$. 点 P 是线段 A_0B_0 上一点, 设 $A_0P=a\text{km}$.



现规划了如下三项工程:

工程1:在点 P 处修建一座造价 0.1 亿元的人行观光天桥;

工程2:将直角三角形 AA_0P 地块全部修建为面积至少 1km^2 的文化主题公园,且每平方千米造价为 $(1+\frac{9}{2a^2})$ 亿元;

工程3:将直角三角形 BB_0P 地块全部修建为面积至少 0.25km^2 的湿地公园,且每平方千米造价为 1 亿元.

记这三项工程的总造价为 W 亿元.

(I) 求实数 a 的取值范围;

(II) 问点 P 在何处时, W 最小,并求出该最小值.

20. (本小题满分12分)

已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

(I) 判断函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性,并用定义给出证明;

(II) 解关于 x 的不等式 $f(2^x) < \frac{5}{2}$.

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=(\lg x)^2 + a\lg x + \frac{5}{4}$ ($a \in \mathbf{R}$).

(I) 当 $a=1$ 时,求函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{10}, 100]$ 上的最小值;

(II) 若存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_0)=a$ 成立,求 a 的取值范围.

22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=x-4\sqrt{2}+|x-a|$, $g(x)=2\sqrt{2-x^2}-x$, 其中 $a>0$.

(I) 当 $a=\sqrt{2}$ 时,若 $f(x)=-\sqrt{2}$, 求 x 的值;

(II) 证明: $g(x) \leq \sqrt{10}$;

(III) 若函数 $h(x)=|f(x)+g(x)|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$, 求 a 的值.