2023—2024 学年度第一学期高三质量检测

数学试题参考答案及评分标准

说明：(1)此评分标准仅供参考；

(2)学生解法若与此评分标准中的解法不同，请酌情给分。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. C　2. A　3. A　4. D　5. B　6. C　7. C　8. B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. AC　10. ABD　11. ACD　12. BD

12. 提示：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(-x_2,-y_2)$

由于 A,B 两点均在双曲线的左支上，所以 $x_A<-\frac{5}{4}$，$x_B<-\frac{5}{4}$，$x_C>\frac{5}{4}$

对于 A：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(-x_2,-y_2)$

则，$k_1\cdot k_2=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}$

$\because A,B$ 均在双曲线上，$\therefore\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{3}=1\\ x_2^2-\frac{y_2^2}{3}=1\end{cases}$，所以 $x_1^2-x_2^2=\frac{1}{3}(y_1^2-y_2^2)$

所以，$k_1\cdot k_2=3$，A 错误.

对于 B：由 $\overrightarrow{CF_1}\cdot\overrightarrow{BF_1}=0$ 知，$CF_1\perp BF_1$

由对称性得，$CF_1\perp CF_2$ 且 $S_{\triangle CBF_1}=S_{\triangle CF_1F_2}$

计算可得，$S_{\triangle CBF_1}=S_{\triangle CF_1F_2}=3$，B 正确

对于 C：$|MC|+|MF_1|=|MC|+|CF_2|+2$

当 M,C,F_2 三点共线时，$|MC|+|MF_1|=|MC|+|CF_2|+2=6$

此时，$x_C=\frac{5}{4}$，与 $x_C>\frac{5}{4}$ 矛盾，故 C 错误

对于 D：$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=(x_1+2,y_1)\cdot(x_1-2,y_1)=x_1^2+y_1^2-4$

又，$y_1^2=3(x_1^2-1)$

所以，$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=4x_1^2-7$

结合，$x_A<-\frac{5}{4}$ 得，$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}$ 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$，故 D 正确.

综上，正确答案为：BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 4　　14. $\frac{\sqrt{5}}{10}$　　15. $\frac{4\sqrt{15}}{5}$　　16. $\{a\,|\,a>0$ 或 $a=-\frac{1}{e}\}$

16. 提示：$f(x)=x^2+ax(e^x-1)-a^2e^x=(x-a)(x+ae^x)$

令 $f(x)=0$，则 $x=a$ 或 $-a=\frac{x}{e^x}$

记 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，∴$g(x)$在$(0,1)$上单调递增；在$(1,+\infty)$上单调递减

∴$g(x)$最大值为 $g(1)=\frac{1}{e}$.

当 $a=0$ 时，$f(x)$只有一个零点，$x=0$，显然不合题意

要使 $f(x)$恰好有两个零点，则方程 $-a=\frac{x}{e^x}$ 只有一个实根，另一个零点为 $x=a$.

故 a 的取值范围为：$(0,+\infty)\cup\left\{-\frac{1}{e}\right\}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

解：(1)∵$b\cos C+c\cos B+\frac{a}{2\cos A}=0$

由正弦定理得：$\sin B\cos C+\sin C\cos B+\frac{\sin A}{2\cos A}=0$ ……………………………… 2 分

∴$\sin(B+C)+\frac{\sin A}{2\cos A}=\sin A+\frac{\sin A}{2\cos A}=0$　又∵$\sin A>0$∴$\cos A=-\frac{1}{2}$， …………… 4 分

∵$A\in(0,\pi)$∴$A=\frac{2\pi}{3}$ ……………………………………………………………… 5 分

(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$bc=4$ …………………………………… 7 分

由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geqslant 3bc=12$

当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立. ……………………………………………………… 9 分

∴$a\geqslant 2\sqrt{3}$即 a 的最小值为 $2\sqrt{3}$. ………………………………………………… 10 分

18.（12 分）

解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d>0)$

因为 $S_5=15$，$a_2\cdot a_4=8$

所以$\begin{cases}5(a_1+2d)=15\\(a_1+d)(a_1+3d)=8\end{cases}$ ………………………………………………… 2 分

解得$\begin{cases}a_1=1\\d=1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=5\\d=-1\end{cases}$（舍去）………………………………………………………… 3 分

所以，$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times1$，即 $a_n=n$． ……………………………………… 4 分

(2)由(1)得 $b_n=2^{a_n}\cdot\cos\frac{a_n\pi}{2}=2^n\cdot\cos\frac{n\pi}{2}$ ……………………………………………… 5 分

当 $n=4k+1,k\in\mathbf{N}$ 时，$\cos\frac{(4k+1)\pi}{2}=\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})=0$，所以 $b_{4k+1}=0$； …………… 6 分

当 $n=4k+2,k\in\mathbf{N}$ 时，$\cos\frac{(4k+2)\pi}{2}=\cos(2k\pi+\pi)=-1$，所以 $b_{4k+2}=-2^{4k+2}$； …… 7 分

当 $n=4k+3,k\in\mathbf{N}$ 时，$\cos\frac{(4k+3)\pi}{2}=\cos(2k\pi+\frac{3\pi}{2})=0$，所以 $b_{4k+3}=0$； …………… 8 分

当 $n=4(k+1),k\in\mathbf{N}$ 时，$\cos\frac{4(k+1)\pi}{2}=\cos(2k\pi+2\pi)=1$，所以 $b_{4k+4}=2^{4k+4}$； …… 9 分

$\therefore T_{100}=-2^2+2^4-2^6+2^8-\cdots+2^{100}$ ……………………………………………………… 10 分

$=\frac{-4\times[1-(-4)^{50}]}{1-(-2^2)}=\frac{2^{102}-4}{5}$． ………………………………………………………… 12 分

19.(12 分)

(1)证明：$\because A_1D\perp$平面 ABC，$BD\subset$平面 ABC $\therefore A_1D\perp BD$

$\because AB=AC=BC=2$，D 为 AC 的中点，$\therefore BD\perp AC$

$AC\cap A_1D=D$ $\therefore BD\perp$平面 ACC_1A_1

$\therefore BD\perp AC_1$ ………………………………………………………………………………… 2 分

在平行四边形 ACC_1A_1 中，$AC=CC_1=C_1A_1=A_1A=2$，

$\therefore$四边形 ACC_1A_1 为菱形

$\therefore AC_1\perp A_1C$

又 D，E 分别为 AC，AA_1 的中点，

$\therefore DE//A_1C$

$\therefore AC_1\perp DE$ ………………………………………………………………………………… 3 分

$\therefore AC_1\perp$平面 BDE ………………………………………………………………………… 4 分

$AC_1\subset$平面 ABC_1

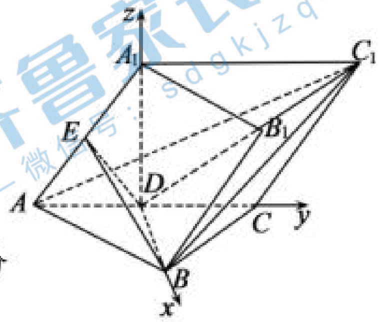
$\therefore$平面 $ABC_1\perp$平面 BDE ………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知，DB，DC，DA_1 两两相互垂直，故建立以 D 为坐标原点，以 DB，DC，DA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴的如图所示的空间直角坐标系

由三棱柱的所有棱长均为 2 得，$DB=\sqrt{3}$，$DA=1$，$DA_1=\sqrt{3}$

$\therefore D(0,0,0)$，$A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$B_1(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，$C_1(0,2,\sqrt{3})$ …………………… 6 分

$\therefore \overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},0,0),\overrightarrow{DB_1}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3}),\overrightarrow{AC_1}=(0,3,\sqrt{3})$ …………………………………… 7 分



设平面 B_1BD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}\sqrt{3}x=0\\ \sqrt{3}x+y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$

令 $z=1$，则 $y=-\sqrt{3},x=0$

所以，平面 B_1BD 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,-\sqrt{3},1)$ …… 9 分

由(1)知 $AC_1\perp$ 平面 BDE

所以，平面 BDE 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC_1}=(0,3,\sqrt{3})$ …………………………………… 10 分

设平面 B_1BD 与平面 BDE 的夹角为 θ

则 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{|-3\sqrt{3}+\sqrt{3}|}{2\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$

所以，平面 B_1BD 与平面 BDE 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………… 12 分

20.（12 分）

解：(1)在 ΔPCO 中，由题可知 $OP=1,\angle CPO=\theta,\angle OCP=\dfrac{\pi}{3},\angle COP=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$ …… 1 分

由正弦定理得，$\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{OC}{\sin\theta}=\dfrac{CP}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}$ …………………………………… 2 分

所以，$OC=\dfrac{\sin\theta}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}$ …………………………………… 3 分

$CP=\dfrac{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}{\sqrt{3}}$ …………………………………… 4 分

在扇形 POA 中，记弧 PA 的长度为 l，则 $l=\theta$ …………………………………… 5 分

所以，$f(\theta)=OC+CP+\theta=\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}+\dfrac{2\sin(\frac{2}{3}\pi-\theta)}{\sqrt{3}}+\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\dfrac{3}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)+\theta$

所以，$f(\theta)=2\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})+\theta,\theta\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$ …………………………………… 7 分

(2)由(1)得，$f'(\theta)=2\cos(\theta+\dfrac{\pi}{6})+1,\theta\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$ …………………………………… 8 分

令 $f'(\theta)=2\cos(\theta+\frac{\pi}{6})+1=0$，得 $\theta=\frac{\pi}{2}$ …………………………………………………… 9 分

当 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(\theta)>0$，$f(\theta)$ 单调递增 …………………………………………………… 10 分

当 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$ 时，$f'(\theta)<0$，$f(\theta)$ 单调递减 ……………………………………………… 11 分

所以，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(\theta)$ 取最大值，且最大值为 $\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}$. ……………………………… 12 分

21.（12 分）

解：(1) 因为抛物线 C 的焦点到 C 的准线的距离为 1，

所以，$p=1$

所以，抛物线 C 的方程为 $x^2=2y$. ……………………………………………………………… 3 分

(2) 由题意可得，直线 l 存在斜率，又直线 l 过 $D(0,4)$，

故设直线 l 的方程为 $y=kx+4$，

由 $\begin{cases}x^2=2y\\y=kx+4\end{cases}$，消去 y 并整理得 $x^2-2kx-8=0$， …………………………………… 4 分

$\Delta=4k^2+32>0$，所以直线 l 与抛物线 C 恒有两个交点.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=-8$，

所以，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+8=2k^2+8$，$y_1y_2=\frac{x_1^2}{2}\cdot\frac{x_2^2}{2}=\frac{(-8)^2}{4}=16$. …………… 6 分

因为，M 为弦 AB 的中点，过 M 作 x 轴垂直的直线与抛物线 C 交于点 N，

所以，$x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=k$，$y_N=\frac{x_N^2}{2}=\frac{k^2}{2}$

所以，N 的坐标为 $(k,\frac{k^2}{2})$ ……………………………………………………………………… 7 分

所以，$\overrightarrow{AN}=(k-x_1,\frac{k^2}{2}-y_1)$，$\overrightarrow{BN}=(k-x_2,\frac{k^2}{2}-y_2)$

因为 $AN\perp BN$

所以，$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}=(k-x_1)(k-x_2)+(\frac{k^2}{2}-y_1)(\frac{k^2}{2}-y_2)=0$ ……………………… 8 分

即 $x_1x_2-k(x_1+x_2)+k^2+y_1y_2-\frac{k^2}{2}(y_1+y_2)+\frac{k^4}{4}=0$

$-8-2k^2+k^2+16-\frac{k^2}{2}(2k^2+8)+\frac{k^4}{4}=0$

整理得 $3k^4+20k^2-32=(k^2+8)(3k^2-4)=0$ ……………………………………………… 10 分

解得 $k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ …………………………………………………………………………… 11 分

所以，直线 l 的方程为 $2\sqrt{3}x-3y+12=0$ 或 $2\sqrt{3}x-3y-12=0$. ………………………… 12 分

22.(12 分)

解:(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$ ………………………… 1 分

由 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，由 $f'(x)<0$ 得 $x>1$； ………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$；$f(x)$ 的单调递减区间为 $(1,+\infty)$. ……………… 3 分

(2)证明：$\because m<n<0$ $\therefore 0<e^m<e^n<1$ ………………………… 4 分

要证明 $\frac{me^n-ne^m}{e^m-e^n}>1$，即证明：$me^n-ne^m<e^m-e^n$

即证明：$\frac{m+1}{e^m}<\frac{n+1}{e^n}$，即证：$\frac{\ln e^m+1}{e^m}<\frac{\ln e^n+1}{e^n}$ ………………………… 6 分

又由(1)可知，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，

$\therefore f(e^m)<f(e^n)$ $\therefore$ 原命题成立. ………………………… 7 分

(3)要证明 $f(x)<\frac{4e^{x-2}}{x^2}$，$(x>0)$

即证明 $x(1+\ln x)<4e^{x-2}$

由(1)可知，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，

$\therefore f(x)\leqslant f(1)$ $\therefore 1+\ln x\leqslant x$ $\therefore x(1+\ln x)\leqslant x^2$（等号在 $x=1$ 时成立） ……………… 9 分

下面证明：$x^2\leqslant 4e^{x-2}$，即证明：$\frac{x^2}{e^x}\leqslant\frac{4}{e^2}$

令 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$ $(x>0)$ $\therefore g'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$

令 $g'(x)>0$，得 $0<x<2$，$g'(x)<0$，得 $x>2$

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,2)$；$g(x)$ 的单调递减区间为 $(2,+\infty)$. ……………… 11 分

$g(x)\leqslant g(2)=\frac{4}{e^2}$（等号在 $x=2$ 时成立）

综上：$f(x)<\frac{4e^{x-2}}{x^2}$（等号不能同时成立）. ………………………… 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索