2023—2024 学年高三年级冬季教学质量检测

数　学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{2,3,4,5,6\}$，$B=\{1,a+2,2a+1\}$，若 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，则 $a=$

A. -1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 若复数 $z=(3+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$，则 $|z+8\mathrm{i}|=$

A. 10　　B. 9　　C. $4\sqrt{5}$　　D. $3\sqrt{6}$

3. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $|\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|=$

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

4. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_5=S_5=5$，则 $\{a_n\}$ 的公差为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

5. 头孢类药物具有广谱抗菌、抗菌作用强等优点，是高效、低毒、临床应用广泛的重要抗生素. 已知某人服用一定量某种头孢类药物后，血浆中的药物浓度在 2 h 后达到最大值 80 mg/L，随后按照确定的比例衰减，半衰期（血浆中的药物浓度降低一半所需的时间）为 2.4 h，那么从服药后开始到血浆中的药物浓度下降到 8 mg/L，经过的时间约为（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$）

A. 8 h　　B. 9 h　　C. 10 h　　D. 11 h

6. 已知圆台的上、下底面的圆心分别为 O_1,O_2，母线 $AB=1$（点 A 位于上底面），且 $BO_2=2AO_1$，圆 O_2 的周长为 $\frac{2\pi}{3}$，一只蚂蚁从点 A 出发沿着圆台侧面爬行一周到点 B，则其爬行的最短路程为

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

$\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 且 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，则 ω 的最小值为

A. 7　　B. 9　　C. 11　　D. 13

8. 设函数 $f(x)=\ln\frac{2\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+a}$ 的定义域为 D，若 $\forall x\in D$，$f(f(x))=x$，则实数 $a=$

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 m,n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，则下列命题正确的是

A. 若 $m/\!/\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

B. 若 $m\subset\alpha$，$n\not\subset\alpha$，则 m 与 n 为异面直线

C. 若 $m/\!/n$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/\alpha$

D. 若 $m\perp\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m\perp n$

10. 已知函数 $f(x)=x-\frac{2}{x}-3\ln x$，记 $f(x)$ 的极小值点为 x_1，极大值点为 x_2，则

A. $x_1+x_2=3$

B. $x_1<x_2$

C. $f(x_1)+f(x_2)=-3\ln 2$

D. $f(x_1)<f(x_2)$

11. 若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，且 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\tan\alpha\tan\beta=\frac{2}{3}$，则

A. $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{6}$

B. $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{11}}{6}$

C. $\cos 2\alpha=\frac{5}{36}$

D. $\beta<\frac{\pi}{3}$

12. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点为 F，动点 M,N 在直线 $l:x=\frac{3}{2}$ 上，且 $FM\perp FN$，线段 FM,FN 分别交 C 于 P,Q 两点，过 P 作 l 的垂线，垂足为 R. 设 $\triangle FMN$ 的面积为 S_1，$\triangle FPQ$ 的面积为 S_2，则

A. S_1 的最小值为 $\frac{1}{2}$

B. $\frac{|PR|}{|PF|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{|MP|\cdot|NF|}{|MN|\cdot|PF|}$ 为定值

D. $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值为 $2\sqrt{6}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若某圆锥的侧面积为底面积的 $\sqrt{5}$ 倍，则该圆锥的母线与底面所成角的正切值为__________.

14. 已知 $P(x,y)$ 为圆 $C:x^2+y^2-4x-5=0$ 上一点，则 $x+2\sqrt{2}y$ 的取值范围是__________.

15. 设 O 为坐标原点,椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A,点 P 在 C 上,直线 PA 的斜率为 $\frac{1}{3}$,PO 的斜率为 2,则 C 的离心率为________.

16. 若曲线 C_1 上的点 P 与曲线 C_2 上的点 Q 关于坐标原点对称,则称 P,Q 是 C_1,C_2 上的一组奇点. 若曲线 $y=m^x(m>0$ 且 $m\neq1)$ 与曲线 $y=2xe^{x+1}$ 有且仅有一组奇点,则 m 的取值范围是________.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列,其前 n 项和为 S_n,已知 $S_3=39$,$a_3-a_2=18$.

(Ⅰ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ)设 $\{a_n-b_n\}$ 是首项为 2,公差为 3 的等差数列,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. (12 分)

记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $a=\frac{(a-b)(a+b)+c^2}{2a-b}$.

(Ⅰ)求 C;

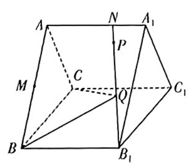
(Ⅱ)求 $\sin^2A+\sin^2B$ 的最大值.

19. (12 分)

如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=4$,$AA_1=3$,M 是棱 AB 的中点,点 N 在棱 AA_1 上,且 $AN=2NA_1$,点 P 在线段 B_1N 上,且 C,M,P,A_1 四点共面.

(Ⅰ)设 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1N}$,求 λ 的值;

(Ⅱ)若 Q 为线段 B_1P 的中点,求二面角 $Q-BC-B_1$ 的大小.



20. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$,且 a_1,a_2,a_3-1 是公差为 d 的等差数列 $\{b_n\}$ 的前 3 项.

(Ⅰ)求 $q+d$ 的最小值;

(Ⅱ)在 $q+d$ 取最小值的条件下,设 $c_n=\frac{a_n(b_n-1)}{b_nb_{n+1}}$,数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n,证明:$T_n<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}$,$g(x)=e^{\sin x}+e^{\cos x}$.

(Ⅰ)求曲线 $y=f(x)$ 的平行于直线 $y=x+2$ 的切线方程;

(Ⅱ)讨论 $g(x)$ 的单调性.

22. (12 分)

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 与直线 $y=-2x$ 交于 O,M 两点,O 为坐标原点,且 $|OM|=\sqrt{5}$.

(Ⅰ)求 C 的方程;

(Ⅱ)过点 M 作斜率互为相反数的两条直线 l_1 和 l_2,分别与 C 交于点 A 和点 B,且点 A 与点 B 均在点 M 的上方,以 AB,AM 为邻边作平行四边形 $ABDM$,求平行四边形 $ABDM$ 面积 S 的最大值.