

2023 年宜荆荆随恩高三 12 月联考

高三数学试卷

命题学校：随州一中

命题教师：刘丽 占雷 刘琰

审题学校：荆州中学

考试时间：2023 年 12 月 26 日 下午 15:00-17:00

试卷满分：150 分

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}$, $N = \{x | 2x^2 - x - 3 > 0\}$, 则 $M \cap (C_R N) = ()$

- A. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq \frac{3}{2}\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 4\}$ D. $\{x | \frac{3}{2} \leq x < 4\}$

2. 若复数 z 与复数 $\frac{3+z}{2-z}$ 都是纯虚数， \bar{z} 是 z 的共轭复数，则 $z\bar{z} = ()$

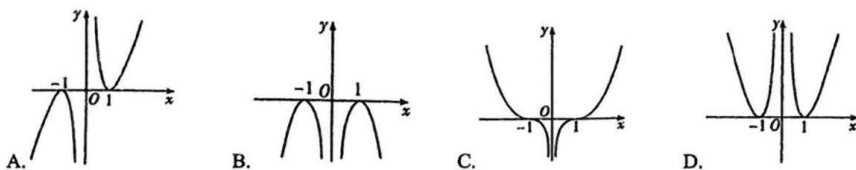
- A. 6 B. $\sqrt{6}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

3. 若 $(4x-m)(x-2)^5$ 的展开式中的 x^3 的系数为 -600 ，则实数 $m = ()$

- A. 8 B. 7 C. 9 D. 10

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，满足 $f(|x|) = f(x)$. 当 $x < 0$ 时， $f(x) = (\frac{1}{x} - x) \ln x^2$ ，

则 $f(x)$ 的大致图象为 $()$



5. 已知 $F(c, 0)$ 为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点，直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ 与椭圆 E 交于 A, B 两点，

若 $\triangle ABF$ 的周长等于 $4c$ ，则椭圆 E 的离心率等于 $()$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在 $(1,2)$ 上是单调递增函数, 则实数 a 的取值范围是 ()
- A. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ B. $(\frac{1}{2e^2}, +\infty)$ C. $[\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $[\frac{1}{2e^2}, +\infty)$
7. 已知 $2\sin\beta - \cos\beta + 2 = 0$, $\sin\alpha = 2\sin(\alpha + \beta)$, 则 $\tan(\alpha + \beta) =$ ()
- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比为 q ($q \neq 1$), 前 n 项和为 S_n , 则“ $S_2 > 0$ ”是“数列 $\{S_{2n}\}$ 是单调递增数列”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知圆锥的侧面展开图是半径为 2 的半圆, 则下列关于该圆锥的结论正确的是 ()
- A. 体积等于 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. 过顶点的截面面积最大值等于 2
C. 外接球的体积等于 $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$ D. 内切球的表面积等于 2π
10. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 P 在抛物线上, 点 $Q(m, n)$, 点 P 到点 Q 和到 y 轴的距离分别为 d_1 、 d_2 , 则 ()
- A. 抛物线 C 的准线方程为 $y = -1$ B. 若 $m = n = 1$, 则 $\triangle PQF$ 周长的最小值等于 3
C. 若 $(m-3)^2 + n^2 = 1$, 则 d_1 的最小值等于 2 D. 若 $m - n = -4$, 则 $d_1 + d_2$ 的最小值等于 $\frac{5\sqrt{2}}{2} - 1$
11. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 且满足 $0 < f(x) < f'(x)$, 若 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 且 $x_1 x_2 = 1$, 则下列不等式一定正确的是 ()
- A. $x_2 f(x_2) > x_1 f(x_1)$ B. $f(x_2) > f(2 - x_1)$
C. $\ln f(x_1) - \ln f(x_2) < x_1 - x_2$ D. $f(x_2) < (2 - x_1) f(x_1)$
12. 投掷一枚质地不均匀的硬币, 已知出现正面向上的概率为 p , 记 A_n 表示事件“在 n 次投掷中, 硬币正面向上出现偶数次”, 则下列结论正确的是 ()
- A. A_2 与 $\overline{A_2}$ 是互斥事件 B. $P(A_2) = p^2$
C. $P(A_{n+1}) = (1-2p)P(A_n) + p$ D. $P(A_{2n}) > P(A_{2n+2})$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知平面向量 $\vec{b} = (1, 1)$, $|\vec{a}| = 2$, \vec{a} 、 \vec{b} 的夹角为 90° , 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____.

14. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 过点 $A(1,1)$ 的直线 l 与圆 O 交于 P, Q 两点, 则 $|PQ|$ 的最小值等于_____.
15. 在学校组织的数学建模大赛活动中, 某兴趣小组的同学准备将一个直径为 20cm 的实心球形木料锯成一个四棱锥模型, 为节约资源, 使损失的木料最少, 则制作出来的四棱锥的体积等于_____ cm^3 .
16. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象经过原点, 若在 $(0, \pi)$ 上恰好有 3 个不同实数 x_i ($i=1,2,3$) 使得对任意 x 都满足 $f(x) + f(2x_i - x) = 2$, 且对任意 α , 使得 $f(x)$ 在 $(\alpha, \alpha + \frac{\pi}{3})$ 上不是单调函数, 则 ω 的取值范围是_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sqrt{3}c \cos A + c \sin A = \sqrt{3}b$.

(1) 求角 C ;

(2) 若 $\angle ACB$ 的平分线交 AB 于点 D , 且 $CD = 2, AD = 2DB$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

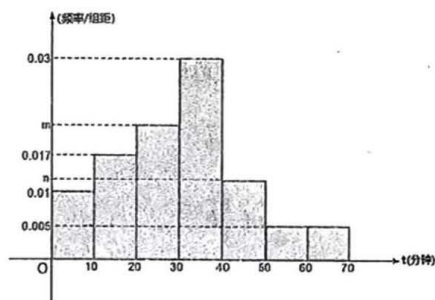
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_4 = a_1 + 2a_2, S_5 = 3S_3 - 2$.

(1) 求 a_n 及 S_n ;

(2) 判断是否存在正整 m, k 使得 $a_m, 4S_k, S_{k+1}$ 成等比数列. 若存在, 求出所有 m, k 的值; 若不存在, 请说明理由.

19. (12 分)

联合国教科文组织确定每年的 4 月 23 日为“世界读书日”, 以促进更多的人去阅读, 享受阅读的乐趣. 为建设读书校园, 提升校园的读书氛围, 市教育局准备在全市义务教育四年级至九年级学段开展“读书月”活动, 活动前, 为了解学生的阅读情况, 从四年级至九年级在校学生中随机问卷调查了 10000 人, 得到他们在过去一个月中平均每天课外的阅读时间 t (单位: 分钟), 整理得到如右的频率分布直方图, 已知这 10000 人的平均每天课外阅读时间的中位数是 31.



(1) 求频率分布直方图中 m, n 的值;

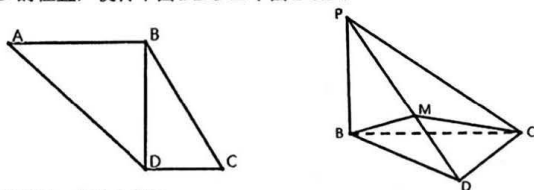
(2) 若 t_0 为整数, 将本次调查中平均每天课外阅读时间 $t \geq t_0$ 的学生选为“读书月”活动的宣传大使, 教育局准备至少选出 1500 名“读书月”宣传大使, 求 t_0 的最大值;

宜荆荆随恩重点高中教科研协作体 * 数学试卷 (共 4 页) 第 3 页

(3)为了进一步了解学生的课外阅读习惯受电子产品的影响,由频率分布直方图中平均阅读时间在 $[20,30)$ 和 $[30,40)$ 两组学生中,按人数比例分配的分层抽样方法抽取了100名学生,已知 $[20,30)$ 组的学生平均每天花在电子产品上的时间为30分钟,方差为36, $[30,40)$ 组的学生平均每天花在电子产品上的时间为20分钟,方差为16,求抽取的100名学生每天花在电子产品上的时间的方差.

20. (12分)

如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $BD \perp CD$, $AB = BD = 2CD = 2$,将 $\triangle ABD$ 沿着 BD 折起到 $\triangle PBD$ 的位置,使得平面 $PBC \perp$ 平面 BCD .



(1)证明: $PB \perp CD$;

(2)点 M 满足 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PD}$ ($0 < \lambda < 1$),若二面角 $C-BM-D$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$,求 λ .

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$.

(1)若 $a = 1$,判断函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $a \geq 1$,证明:对任意 $x \in (2a, +\infty)$, $f(x) < \ln 2^{a-2\ln a}$.

22. (12分)

已知圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 4$,点 $N(-2,0)$, P 是圆 M 上的动点,线段 PN 的中垂线与直线 PM 交于点 Q ,点 Q 的轨迹为曲线 C .

(1)求曲线 C 的方程;

(2) $A_1(-1,0)$, $A_2(1,0)$,点 E, F (不在曲线 C 上)是直线 $x=2$ 上关于 x 轴对称的两点,直线 A_1E, A_2F 与曲线 C 分别交于点 A, B (不与 A_1, A_2 重合),证明:直线 AB 过定点.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

