# 名校教育联盟·2024届高三入学摸底考试·数学

## 参考答案、提示及评分细则

1.【答案】D

【解析】由$\frac{1}{1-z}=-\mathrm{i}$解得$z=1-\mathrm{i}$,所以$|z|=\sqrt{2}$,故选D.

2.【答案】A

【解析】由$\log_{\frac{1}{2}}x\geqslant 1$,得$0<x\leqslant\frac{1}{2}$,所以$A=\left\{x\,\middle|\,0<x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$,

又因为$B=\left\{y\,\middle|\,y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,x\geqslant 2\right\}=\left\{y\,\middle|\,0<y\leqslant\frac{1}{4}\right\}$,所以$A\cap B=B$,故选A.

3.【答案】B

【解析】将样本数据从小到大排列为25,26,27,28,28,30,33,36,37,40,这10个月的月销售量的中位数为$\frac{28+30}{2}=29$,A错误;

这10个月的月销售量的平均数为$\frac{25+26+27+\cdots+37+40}{10}=31$,B正确;

根据百分位数的定义可知$10\times 75\%=7.5$,则这10个月的月销售量的第75百分位数为第8个数36,C错误;

由图形可知,前5个月的月销售量的波动小于后5个月的月销售量的波动,所以前5个月的月销售量的方差小于后5个月的月销售量的方差,D错误,故选B.

4.【答案】C

【解析】由$GF\parallel$平面$ABE$得,$GF\parallel AB$,于是$CF=CG$,即$1-\lambda=\frac{\lambda}{2}$,解得$\lambda=\frac{2}{3}$,故选C.

5.【答案】A

【解析】因为$\{a_n\}$是正项等比数列,$a_1a_{11}=a_7$,所以$a_1a_{11}=a_5a_7=a_7$,

又$a_7>0$,所以$a_5=1$,因为$q\in(0,1)$,所以$T_n$有最大值$T_5=T_4$;

若$T_n$有最大值$T_5$,则$\begin{cases}T_5\geqslant T_6\\T_5\geqslant T_4\end{cases}$.因为$T_n>0$,所以$\begin{cases}a_6\leqslant 1\\1\leqslant a_5\end{cases}$,故不一定有$a_5=1$,故选A.

6.【答案】D

【解析】$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos 2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-1=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}$,故选D.

7.【答案】C

【解析】不妨设点$A(x_A,y_A)$在第一象限,由题设及抛物线定义知,直线$AD$与抛物线的准线垂直.因为$|AF|=3$,所以$y_A+1=3$,$x_A=2\sqrt{2}$,即$A(2\sqrt{2},2)$,$D(2\sqrt{2},-1)$.又焦点$F(1,0)$,由$A,F,B$三点共线可得$x_B=-\sqrt{2}$,$B\left(-\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$,故$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}|AD||x_A-x_B|=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.故选C.

8.【答案】B

【解析】不妨设 $0<x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)>e^{tx_1}-e^{tx_2}$，即 $f(x_1)-e^{tx_1}>f(x_2)-e^{tx_2}$ 恒成立，故 $g(x)=f(x)-e^{tx}$ 单调递减，则 $g'(x)=\ln x-te^{tx}\leqslant 0$ 恒成立，

即 $x\ln x\leqslant txe^{tx}=e^{tx}\ln e^{tx}$. 当 $x\in(0,1]$ 时，$x\ln x\leqslant 0<txe^{tx}$ 成立，符合题意；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，设 $h(x)=x\ln x$，则 $h'(x)=\ln x+1>0$，故 $h(x)$ 单调递增，

由 $h(e^{tx})\geqslant h(x)$ 得 $e^{tx}\geqslant x$ 恒成立，即 $t\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$ 恒成立. 设 $H(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$H'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

则 $x\in(0,e)$ 时，$H'(x)>0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$H'(x)<0$，即 $H(x)$ 在 $(0,e)$ 单调递增，在 $(e,+\infty)$ 单调递减，

$H(x)\leqslant H(e)=\dfrac{1}{e}$，所以 $t\geqslant\dfrac{1}{e}$，故选 B.

9.【答案】ACD

【解析】当截面平行于正方体的一个侧面时可得 C，当截面过正方体的体对角线时可得 D，当截面既不过体对角线又不与任一侧面平行时可得 A，但无论如何都不能截得 B. 故选 ACD.

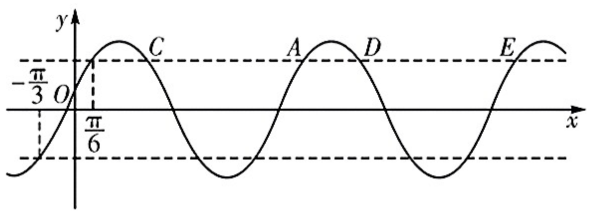
10.【答案】AC

【解析】由圆 $C$ 与 $x$ 轴相切于点 $T(1,0)$，可设圆 $C$ 的方程为 $(x-1)^2+(y-b)^2=b^2$，所以 $b^2=1^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\left(\dfrac{5}{4}\right)^2$，所以圆 $C$ 的方程为 $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$，故 A 正确；圆 $C$ 与圆 $O$ 的方程相减得 $4x+5y-4=0$，此方程即为其相交弦所在直线方程，故 B 错误；设 $P(x,y)$ 为圆 $O$ 上任意一点，则 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{\sqrt{x^2+\left(y-\dfrac{1}{2})\right)^2}}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{5}{4}-y}}{\sqrt{5-4y}}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{|MA|}{|MB|}=\dfrac{|NA|}{|NB|}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{|MA|}{|MB|}-\dfrac{|NB|}{|NA|}=-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{|NB|}{|NA|}+\dfrac{|MA|}{|MB|}=\dfrac{5}{2}$，故 C 正确，D 错误，故选 AC.

11.【答案】ACD

【解析】因为 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以 $\dfrac{T}{2}\geqslant\dfrac{\pi}{6}-\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow T\geqslant\pi$，

因为 $\dfrac{-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}}{2}=-\dfrac{\pi}{12}$，所以 $f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=0$，又 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$，如下图依次讨论 $x=\dfrac{4\pi}{3}$ 对应为点 $C,A,D,E$ 四种情况，




若 $\dfrac{4\pi}{3}-\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{\omega}$，则 $\omega=\dfrac{3}{5}$，满足 $T\geqslant\pi$；若 $\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，则 $\omega=\dfrac{12}{7}$，满足 $T\geqslant\pi$；

由 $\dfrac{\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{3\pi}{4}$，若 $\dfrac{3\pi}{4}-(-\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{3}{4}T=\dfrac{3\pi}{2\omega}$，则 $\omega=\dfrac{9}{5}$，满足 $T\geqslant\pi$；

若$\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=2T=\frac{4\pi}{\omega}$，则$\omega=\frac{24}{7}$，不满足$T\geqslant\pi$，其它情况均不符合，故选 ACD.

12.【答案】14

【解析】直接法：当乙是第 1 名时，甲、丙、丁共 3 名同学有 $A_3^3=6$ 种排法；当乙不是第 1 名时，甲、乙、丙、丁共 4 名同学有 $A_2^1\cdot A_2^1\cdot A_2^2=8$ 种排法，所以这 4 个人名次排列共有 14 种.

间接法：这 4 个人名次排列的可能情况共有 $A_4^4-2A_3^3+A_2^2=14$ 种.

13.【答案】$\frac{7}{2}$

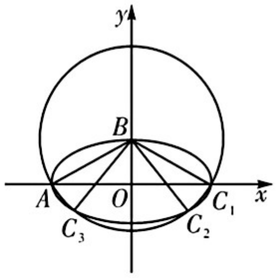
【解析】由已知 $a_2-a_1=1,a_3-a_2=2,\cdots,a_n-a_{n-1}=n-1,n\geqslant2$，

所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=8+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n^2-n+16}{2},n\geqslant2$.

又 $a_1=8$ 也满足上式，所以$\frac{a_n}{n}=\frac{n^2-n+16}{2n}=\frac{n}{2}+\frac{8}{n}-\frac{1}{2}\geqslant\frac{7}{2}$，当且仅当 $n=4$ 时取等号，

所以$\frac{a_n}{n}$的最小值是$\frac{7}{2}$.

14.【答案】$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$




【解析】由题意知$\triangle ABC$ 的第三个顶点 $C$ 在以 $B$ 为圆心，以 $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆上，要使以 $B$ 为顶角的等腰$\triangle ABC$ 恰好有 3 个，则需要满足椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与圆 $x^2+(y-b)^2=a^2+b^2$ 有四个公共点.由$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\x^2+(y-b)^2=a^2+b^2\end{cases}$得$-\frac{c^2}{b^2}y^2=2by$，所以 $y=0$ 或$y=-\frac{2b^3}{c^2}$.

当 $y=0$ 时，椭圆与圆有两个交点，分别为左右顶点，当 $C$ 位于右顶点处满足条件；

当 $y=-\frac{2b^3}{c^2}$时，要满足椭圆与圆有两个不同交点 $C_2,C_3$，需要 $y=-\frac{2b^3}{c^2}>-b$，即 $2b^2<c^2=a^2-b^2$，即 $a^2>3b^2$，解得$\frac{b}{a}<\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线 $AB$ 的斜率的取值范围为$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

15.【解析】(1)因为 $3\tan\frac{C}{2}=2\sin(A+B)$，所以$\frac{3\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=2\sin(\pi-C)=2\sin C=4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$， ……………… 3 分

又因为 $\sin\frac{C}{2}\neq0,\cos\frac{C}{2}>0$，所以 $\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，故 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………… 6 分

(2)由$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$，$CD=2AD$，可知 $CD=BD=2AD$.

设$\angle ACD=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$，则 $B=\angle BCD=\frac{\pi}{3}-\theta,A=\frac{\pi}{3}+\theta$.

在△$ACD$ 中，由正弦定理得 $\sin A=2\sin\theta$， ………………………………………………………… 9 分

即 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=2\sin\theta$，化简得$\sqrt{3}\cos\theta=3\sin\theta$，即 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$，所以 $\sin A=1$，$A=\frac{\pi}{2}$.

故△$ABC$ 是直角三角形. ………………………………………………………………………………… 13 分

16.【解析】(1)因为 $D$，$E$ 分别为 $AB$，$BB_1$ 的中点，$AA_1B_1B$ 是正方形，所以 $AE\perp A_1D$，

因为 $AE\perp A_1C$，$A_1D\cap A_1C=A_1$，所以 $AE\perp$平面 $A_1CD$，故 $AE\perp CD$. ………………………… 3 分

因为平面 $ABC\perp$平面 $AA_1B_1B$，平面 $ABC\cap$平面 $AA_1B_1B=AB$，且 $AA_1\perp AB$，

所以 $AA_1\perp$平面 $ABC$，故 $AA_1\perp CD$.

因为 $AA_1\cap AE=A$，所以 $CD\perp$平面 $AA_1B_1B$. ……………………………………………………… 7 分

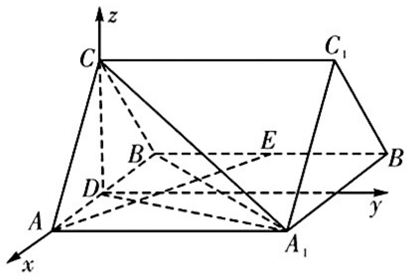
(2)由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中的体积为 4 可得 $CD=2$.

以 $DA$ 所在直线为 $x$ 轴，过 $D$ 作 $AB$ 的垂线为 $y$ 轴，$DC$ 所在直线为 $z$ 轴建立如图所示空间直角坐标系，

则 $A(1,0,0)$，$B(-1,0,0)$，$C(0,0,2)$，$A_1(1,2,0)$，$E(-1,1,0)$，

$\overrightarrow{AE}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{BA_1}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(1,0,2)$. ……………………………………… 10 分

设平面 $A_1BC$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，




由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$得$\begin{cases}2x+2y=0,\\ x+2z=0.\end{cases}$取 $\boldsymbol{m}=(2,-2,-1)$.

设直线 $AE$ 与平面 $A_1BC$ 所成角为 $\theta$，则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故直线 $AE$ 平面 $A_1BC$ 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$。 …………………………………………………… 15 分

17.【解析】设“抽中甲会比划的谜语的个数为 $i(i=1,2,3)$”为事件 $A_i$，“乙猜对的谜语的个数为 $j(j=0,1,2,3)$”为事件 $B_j$，“甲乙配合猜对 1 个谜语”为事件 $C$. …………………………………………………… 1 分

(1)甲乙配合猜对 1 个谜语，则 $P(C)=P(A_3B_1)+P(A_2B_1)+P(A_1B_1)$ ………………………………… 3 分

$=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}\cdot C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}\cdot C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}\times\frac{2}{3}=\frac{22}{45}$，

所以甲乙配合猜对 1 个谜语的概率为$\frac{22}{45}$. ……………………………………………………………… 7 分

(2)由题意，随机变量 $X$ 的可能取值为 0，1，2，3

$P(X=0)=P(A_3B_0)+P(A_2B_0)+P(A_1B_0)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}\times\frac{1}{3}=\frac{23}{135}$，

$P(X=1)=P(C)=P(A_3B_1)+P(A_2B_1)+P(A_1B_1)=\frac{22}{45}$，

$P(X=2)=P(A_3B_2)+P(A_2B_2)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}\cdot C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{14}{45}$，

$P(X=3)=P(A_3B_3)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{135}$. …………………………………………………… 12 分

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{23}{135}$ | $\frac{22}{45}$ | $\frac{14}{45}$ | $\frac{4}{135}$ |

数学期望 $E(X)=\frac{23}{135}\times0+\frac{22}{45}\times1+\frac{14}{45}\times2+\frac{4}{135}\times3=\frac{6}{5}$. ………………………… 15 分

18.**【解析】**(1)由题设得 $\frac{\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2}}{\left|x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}=\sqrt{2}$,化简得 $x^2-y^2=1$.

故所求曲线 $C$ 的方程为 $x^2-y^2=1$. ………………………… 5 分

(2)点 $I$ 在直线 $l$ 上.

因为 $F_1(-\sqrt{2},0)$,设点 $I,A,B$ 的坐标分别是 $(x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.

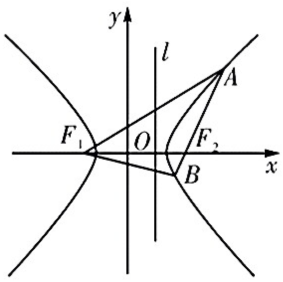
由题设知 $|F_1B|(x_1-x,y_1-y)+|BA|(-\sqrt{2}-x,-y)+|AF_1|(x_2-x,y_2-y)=(0,0)$,

解得 $x=\frac{|F_1B|x_1+|F_1A|x_2-\sqrt{2}|AB|}{|F_1B|+|AB|+|AF_1|}$. ………………………… 8 分

当 $AB\perp x$ 轴时,$x_1=x_2=\sqrt{2}$,$|F_1B|=|F_1A|=3$,$|AB|=2$,

代入有 $x=\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以点 $I$ 在直线 $l$ 上. ………………………… 10 分

当 $AB$ 不与 $x$ 轴垂直时,设直线 $AB$ 的方程是 $y=k(x-\sqrt{2})$,




因为曲线 $C$ 的渐近线的斜率为 $\pm1$,且直线 $AB$ 与曲线 $C$ 的右支相交于两点,所以 $|k|>1$.

将 $y=k(x-\sqrt{2})$ 代入 $x^2-y^2=1$ 有 $(1-k^2)x^2+2\sqrt{2}k^2x-(2k^2+1)=0$,

$\therefore x_1+x_2=\frac{-2\sqrt{2}k^2}{1-k^2}$,$x_1x_2=\frac{-2k^2-1}{1-k^2}$. ………………………… 12 分

$|F_1A|=\sqrt{(x_1+\sqrt{2})^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+\sqrt{2})^2+x_1^2-1}=1+\sqrt{2}x_1$,

同理 $|F_1B|=1+\sqrt{2}x_2$,$|AB|=(-1+\sqrt{2}x_1)+(-1+\sqrt{2}x_2)=-2+\sqrt{2}(x_1+x_2)$.

于是 $|F_1B|+|AB|+|AF_1|=2\sqrt{2}(x_1+x_2)=2\sqrt{2}\cdot\frac{-2\sqrt{2}k^2}{1-k^2}=\frac{8k^2}{k^2-1}$, ………………………… 14 分

$|F_1B|x_1+|F_1A|x_2-\sqrt{2}|AB|=(1+\sqrt{2}x_2)x_1+(1+\sqrt{2}x_1)x_2-\sqrt{2}[-2+\sqrt{2}(x_1+x_2)]$

$=(x_1+x_2)+2\sqrt{2}x_1x_2+2\sqrt{2}-2(x_1+x_2)=2\sqrt{2}x_1x_2-(x_1+x_2)+2\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}\cdot\frac{-(2k^2+1)}{1-k^2}+\frac{2\sqrt{2}k^2}{1-k^2}+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}\left(\frac{2k^2+1}{k^2-1}+\frac{-k^2}{k^2-1}+1\right)=\frac{4\sqrt{2}k^2}{k^2-1}$.

所以 $x=\frac{\frac{4\sqrt{2}k^2}{k^2-1}}{\frac{8k^2}{k^2-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故点 $I$ 在直线 $l$ 上. ………………………… 17 分

19.【解析】(1)由题设知 $f'(x)=2x-a(\ln x+1)\geqslant 0,x\in(0,+\infty)$恒成立.

若 $a<0$,当 $x>0$ 且 $x\to 0$,$f'(x)\to-\infty$,不符合题意;

若 $a=0$,则 $f'(x)=2x>0$,满足题意;

若 $a>0$,$f''(x)=2-\frac{a}{x}$,令 $f''(x)=0$,得 $x=\frac{a}{2}$.当 $x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$时,$f'(x)$单调递减,$x\in\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$时,$f'(x)$单调递增,故 $f'(x)$的最小值为 $f'\left(\frac{a}{2}\right)=-a\ln\frac{a}{2}$.

由题设知 $f'(\frac{a}{2})=-a\ln\frac{a}{2}\geqslant 0$,即 $a\leqslant 2$.

综上可知 $a$ 的取值范围是$[0,2]$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $f(1)=0$,所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$的一个零点.

若 $x=t(t\neq 1)$是函数 $f(x)$的零点,则 $t^2-1-at\ln t=0$,

$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}-1-\frac{a}{t}\ln\frac{1}{t}=\frac{1+at\ln t-t^2}{t^2}=0$,即$\frac{1}{t}$也是函数 $f(x)$的零点,

故函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$和$(0,1)$上的零点一一对应,且它们互为倒数. ……………………………… 9 分

由(1)可知,当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,不符合题意;

当 $a<0,x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)=2x-a(1+\ln x)>0$,$f(x)$单调递增,因此 $f(x)>f(1)=0$,即 $f(x)$在$(1,+\infty)$上不存在零点,此时 $f(x)$也只有一个零点 $x=1$,

不符合题意;…………………………………………………………………………………………… 12 分

当 $a>2$ 时,由(1)可知 $x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$时,$f'(x)$单调递减,$x\in\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$时,$f'(x)$单调递增,

且 $f'(\frac{a}{2})=-a\ln\frac{a}{2}<0$,$f'(1)=2-a<0$,$f'(4a^2)=8a^2-a(1+\ln 4a^2)=a(8a-1-2\ln 2a)>a(8a-1-2(2a-1))=a(4a+1)>0$,因此存在 $x_0\in\left(\frac{a}{2},4a^2\right)$,使得 $f'(x_0)=0$,

当 $x\in(1,x_0)$时,$f(x)$单调递减,当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$f(x)$单调递增,因此 $f(x_0)<f(1)=0$,

$f(4a^2)=16a^4-1-4a^3\ln 4a^2=16a^4-1-8a^3\ln 2a>16a^4-1-8a^3(2a-1)=8a^3-1>0$,

因此,$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上存在唯一零点,此时 $f(x)$有三个零点 $x_1,x_2,x_3$,设 $x_1<x_2<x_3$,则 $0<x_1<1=x_2<x_3$,$x_1\cdot x_3=1$. …………………………………………………………………………………… 14 分

又因为 $x_1+x_2+x_3<\frac{7}{2}$,所以 $x_3+\frac{1}{x_3}<\frac{5}{2}$,从而 $1<x_3<2$.

因为 $f(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增,所以 $0=f(x_3)<f(2)=3-2a\ln 2$,解得 $a<\frac{3}{2\ln 2}$.

综上可知 $a$ 的取值范围是$(2,\frac{3}{2\ln 2})$. ……………………………………………………………… 17 分