

山东省实验中学 2024 届高三第三次诊断考试

数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 先将自己的考生号等信息填写在试卷和答题纸上, 并在答题纸规定位置贴条形码
2. 本试卷满分 150 分, 分为第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 第 I 卷为第 1 页至第 3 页, 第 II 卷为第 3 页至第 4 页.
3. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号.
4. 非选择题的作答: 用 0.5 毫米黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

第 I 卷(共 60 分)

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, $N = \{x \in \mathbf{Z} | 2x + 1 > 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
A. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1\}$
2. 已知复数 z 满足 $(1 + 2i)z = 3 - 2i$, 则复数 z 的实部为 ()
A. $\frac{8}{5}$ B. $-\frac{8}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$
3. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则“ $a_1 = 2$ ”是“ $\{a_n\}$ 为单调递增数列”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 把一个正方体各面上均涂上颜色, 并将各棱三等分, 然后沿等分线把正方体切开. 若从所得的小正方体中任取一个, 恰好抽到 2 个面有颜色的小正方体的概率为 ()
A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{8}{27}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{1}{2}$
5. 如图在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 O 为线段 BD 的中点. 设点 P 在线段 CC_1 上, 直线 OP 与平面 A_1BD 所成的角为 α , 则 $\sin \alpha$ 的取值范围是

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 一组数据 $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ ($a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2023}$)，记其中位数为 k ，均值为 m ，标准差为 s_1 ，由其得到新数据 $2a_1 + 1, 2a_2 + 1, 2a_3 + 1, \dots, 2a_{2023} + 1$ 的标准差为 s_2 ，下列结论正确的是 ()

- A. $k = a_{1012}$ B. $a_{1011} < m < a_{1012}$ C. $m \geq k$ D. $s_2 = 2s_1$

10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)， x_1, x_2 为 $f(x)$ 的两个极值点，且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$ ，

直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，

下列结论正确的是 ()

- A. $\omega = 4$ B. $\varphi = -\frac{\pi}{6}$
C. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, 0]$ 上单调递增 D. $g(x)$ 图象关于点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2} f(x-2), & x > 2 \end{cases}$ ，下列说法正确的是 ()

- A. 当 $x \in [2n, 2n+2]$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 时， $f(x) = \frac{1}{2^n} \sin \pi(x-2n)$
B. 函数 $f(x)$ 在 $[2n, 2n + \frac{1}{2}]$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 上单调递增
C. 方程 $f(x) = \lg(x+2)$ 有 4 个相异实根
D. 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq k(x-2)$ 在 $[2, 4]$ 恒成立，则 $k \geq 1$

12. 圆柱 OO_1 高为 1，下底面圆 O 的直径 AB 长为 2， BB_1 是圆柱 OO_1 的一条母线，点 P, Q 分别在上、下底面内 (包含边界)，下列说法正确的有 ()。

- A. 若 $PA + PB = 3$ ，则 P 点的轨迹为圆
B. 若直线 OP 与直线 OB_1 成 45° ，则 P 的轨迹是抛物线的一部分
C. 存在唯一的一组点 P, Q ，使得 $AP \perp PQ$

D. $AP + PQ + QB_1$ 的取值范围是 $[\sqrt{13}, 2\sqrt{3} + \sqrt{5}]$

第 II 卷 (共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知点 $A(-1,1)$, $B(3,y)$, 向量 $\vec{a} = (1,2)$, 若 \overline{AB} 与 \vec{a} 成锐角, 则 y 的取值范围为_____.

14. 如果圆台的上底面半径为 5, 下底面半径为 R , 中截面 (与上、下底面平行且等距的平面) 把圆台分为上、下两个部分, 其侧面积的比为 1:2, 则 $R =$ _____.

15. 若关于 x 的不等式 $(x^2 + 1)e^x \geq ax^2$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 过 C 中心的直线交 C 于 M, N 两点, 点 P 在 x 轴上其横坐标是点 M 横坐标的 3 倍, 直线 NP 交 C 于点 Q , 若直线 QM 恰好是以 MN 为直径的圆的切线, 则 C 的离心率为_____.

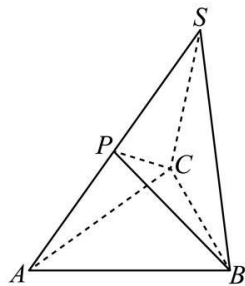
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $(\sin C + \sin B)(c - b) = a(\sin A - \sin B)$.

(1) 求角 C 的大小

(2) 若 $\angle ACB$ 的平分线交 AB 于点 D , 且 $CD = 2$, $AD = 2DB$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图, 三棱锥 $S - ABC$ 的底面 ABC 和侧面 SBC 都是等边三角形, 且平面 $SBC \perp$ 平面 ABC , 点 P 在侧棱 SA 上.



(1) 当 P 为侧棱 SA 的中点时, 求证: $SA \perp$ 平面 PBC ;

(2) 若二面角 $P - BC - A$ 的大小为 60° , 求 $\frac{PA}{SA}$ 的值.

19. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n} a_n (n \in \mathbf{N}^*)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = \frac{a_n}{n}$ 在 b_k 和 b_{k+1} 之间插入 k 个数, 使这 $k+2$ 个数组成等差数列, 将插入的 k 个数之和记为 c_k , 其中 $k=1, 2, \dots, n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

20. 某中学有 A, B 两个餐厅为老师与学生们提供午餐与晚餐服务, 王同学、张老师两人每天午餐和晚餐都在学校就餐, 近一个月 (30 天) 选择餐厅就餐情况统计如下:

选择餐厅情况 (午餐, 晚餐)	(A, A)	(A, B)	(B, A)	(B, B)
王同学	9 天	6 天	12 天	3 天
张老师	6 天	6 天	6 天	12 天

假设王同学、张老师选择餐厅相互独立, 用频率估计概率.

- (1) 估计一天中王同学午餐和晚餐选择不同餐厅就餐的概率;
- (2) 记 X 为王同学、张老师在一天中就餐餐厅的个数, 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;
- (3) 假设 M 表示事件“ A 餐厅推出优惠套餐”, N 表示事件“某学生去 A 餐厅就餐”, $P(M) > 0$, 已知推出优惠套餐的情况下学生去该餐厅就餐的概率会比不推出优惠套餐的情况下去该餐厅就餐的概率要大, 证明: $P(M|N) > P(M|\bar{N})$.

21. 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$.

- (1) 若函数 $\varphi(x) = f(x) - \frac{x+1}{x-1}$, 求函数 $\varphi(x)$ 的单调区间;
- (2) 设直线 l 为函数 $f(x)$ 的图象上一点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线. 证明: 在区间 $(1, +\infty)$ 上存在唯一的 x_0 , 使得直线 l 与曲线 $y = g(x)$ 相切.

22. 已知动圆过点 $F(0, 1)$, 且与直线 $l: y = -1$ 相切, 设动圆圆心 D 的轨迹为曲线 C .

- (1) 求曲线 C 的方程;
- (2) 过 l 上一点 P 作曲线 C 的两条切线 PA, PB , A, B 为切点, PA, PB 与 x 轴分别交于 M, N 两点. 记 $\triangle AFM$, $\triangle PMN$, $\triangle BFN$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 .
 - (i) 证明: 四边形 $FNPM$ 为平行四边形;
 - (ii) 求 $\frac{S_2^2}{S_1 S_3}$ 的值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

