

西南大学附中 重庆育才中学 万州中学
高2024届拔尖强基联盟高三下二月联合考试
数学试题

(满分: 150分; 考试时间: 120分钟)

命题学校: 西南大学附中

2024年2月

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上.
2. 答选择题时, 必须使用2B铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用0.5毫米的黑色签字笔书写; 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整.
3. 考试结束后, 将答题卡交回(试题卷学生保存, 以备评讲).

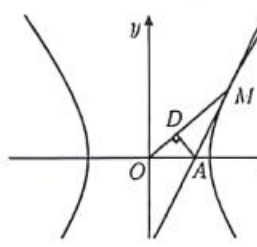
一、选择题: 本题共8小题, 每小题5分, 共40分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 一个容量为10的样本, 其数据依次为: 9, 2, 5, 10, 16, 7, 18, 23, 20, 3, 则该组数据的第75百分位数为 ()
A. 15 B. 16 C. 17 D. 18
2. 已知点 $Q(1,4)$ 在抛物线 $x^2 = 2py$ 上, F 为抛物线的焦点, 则直线 QF 的斜率为 ()
A. 3 B. $\frac{16}{3}$ C. $\frac{63}{16}$ D. $\frac{64}{15}$
3. 已知 m, n, l 是空间中三条互不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面, 则下列说法正确的是 ()
A. $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n // \alpha$ B. $m // n$ 且 $m \perp \alpha$, 则 $n \perp \alpha$
C. $m // \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$ D. $\alpha // \beta, l \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $l // n$
4. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $\frac{1}{2}S_n + 1 = a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $S_5 =$ ()
A. 30 B. 64 C. 62 D. 126
5. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 弦 AB 过定点 $P(1,1)$, 则弦长 $|AB|$ 不可能的取值是 ()
A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $2\sqrt{5}$

高三下二月联合考试 数学 第1页 (共4页)

同德教育

全能王 创建

6. 在同一直角坐标平面内, 已知点 $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,2)$, 点 P 满足 $PA \cdot PB = \overline{OP} \cdot \overline{OB}$ 的最小值为 ()
- A. $2-2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}-2$ C. $2\sqrt{2}+2$ D. $-2\sqrt{2}-2$
7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\frac{\tan A \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{1}{2}$, $c = \sqrt{3}$, $C =$ 则 ab 的值为 ()
- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3
8. 如图, 已知 M 为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一动点, 过 M 作双曲线 E 的切线交 x 轴于点 A , 过点 A 作 $AD \perp OM$ 于点 D , 则 $|OD| \cdot |OM|$ 的值是 ()
- A. a^2 B. b^2
C. c^2 D. 不确定
- 

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 3$, 则下列说法正确的是 ()
- A. $f(x)$ 的值域为 $[1, 5]$ B. $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbb{Z}$
C. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的递增区间为 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ D. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{5}{6}\pi\right)$ 上的极值点个数为 1
10. 2023 年旅游市场强劲复苏, 7, 8 月的暑期是旅游高峰期. 甲、乙、丙、丁四名旅游爱好者计划 2024 年暑期在北京、上海、广州三个城市中随机选择一个去旅游, 每个城市至少有一人选择. 事件 M 为“甲选择北京”, 事件 N 为“乙选择上海”, 则下列结论正确的是 ()
- A. 事件 M 与 N 互斥 B. $P(N|M) = P(M|N)$
C. $P(\overline{MN}) = \frac{31}{36}$ D. $P(M \cup N) = \frac{2}{3}$
11. 已知定义在实数集 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$, $f(1) = 0$, $f'(1) = \frac{1}{2}$, 则 ()
- A. $f(0) = 0$ B. $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 成中心对称
C. $f(2024) = 1012 \times 2023$ D. $\sum_{k=1}^{2024} f'(k) = 1012 \times 2024$

高三下二月联合考试 数学 第 2 页 (共 4 页)

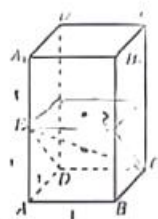
同课异构

全能王 创建

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | -2x^2 + 7x - 3 \geq 0\}$, 集合 $B = \{x | \log_2 x > 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

13. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $BB_1 = 2$, $AB = AD = 1$, E 为 AA_1 的中点, 则 A_1C 中点到平面 DCE 的距离为_____.



14. 已知实数 a, b 满足 $a^2 - ab + b^2 = 1$, 则 ab 的最大值为_____; $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1}$ 的取值范围为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 同时满足 $a_n \in \mathbb{N}^*$, a_3, S_3, a_7 成等差数列, S_2 是 $a_2 - 1$ 和 $S_3 - 1$ 的等比中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 $b_n = a_n + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 时, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

16. (15 分) 2024 年春节期间的, 某家庭设计了一个抽红包游戏, 以营造和谐轻松愉快的家庭氛围. 游戏中有外观完全相同的红包共 6 个, 其中装有 10 元, 20 元, 30 元的红包各两个, 小明每次从中任意抽取 3 个红包, 记录金额后放回, 共抽 2 次. 若每次抽的红包总金额超过 60 元记 2 分, 超过 40 元不超过 60 元记 1 分, 不超过 40 元不计分, 两次结束得分恰好为 3 分奖励旺旺零食大礼包一份.

(1) 求小明在第一次抽取中, 抽出装有 20 元红包个数多于装有 10 元红包个数的概率;

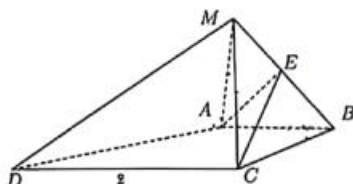
(2) 用随机变量 X 表示小明抽两次的得分总和, 求 X 的分布列及期望.

17. (15分) 在四棱锥 $M-ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel CD$, $CD=2$, $AB=BC=1$, $AM=CM=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

$\angle ABC=60^\circ$, $AD \perp AM$.

(1) 求证: 平面 $MAC \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若线段 MB 上存在点 E , 满足 $\overline{BE}=\lambda\overline{EM}$, 且平面 ACE 与平面 ADM 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{70}}{70}$, 求实数 λ 的值.



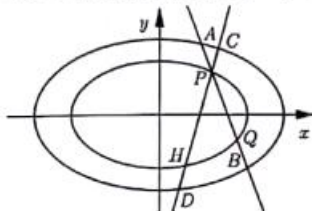
18. (17分) 如图, 已知椭圆 $E_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与椭圆 $E_2: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同的离心率,

点 $P(\sqrt{3}, 1)$ 在椭圆 E_1 上. 过点 P 的两条不重合直线 l_1, l_2 与椭圆 E_1 相交于 Q, H 两点, 与椭圆 E_2 相交于 A, B 和 C, D 四点.

(1) 求椭圆 E_1 的标准方程;

(2) 求证: $S_{\triangle APD} = S_{\triangle BQD}$;

(3) 若 $\frac{|BQ|}{|DH|} = \frac{|DP|}{|BP|}$, 设直线 l_1, l_2 的倾斜角分别为 α, β , 求证: $\alpha + \beta$ 为定值.



19. (17分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - mx$, $g(x) = \cos mx - 1$, 其中 $m \in R$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $m=1$, $h(x) = f(x) + g(x) + 1$, 求证: $h(x)$ 在定义域内有两个不同的零点;

(3) 若 $f(x) + g(x) \leq 0$ 恒成立, 求 m 的值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线