2024年1月“七省联考”押题预测卷02

数　学

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

注意事项：

1．本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第I卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第II卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．集合 $A=\{x|\ln x\geq 1\}$，$B=\{x|1<x<3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\{x|\mathrm{e}<x<3\}$　　C．$\{x|\mathrm{e}\leq x<3\}$　　D．$\{x|x>1\}$

【答案】C

【解析】由 $\ln x\geq 1\Rightarrow x\geq \mathrm{e}$，即 $A=\{x|x\geq \mathrm{e}\}\Rightarrow A\cap B=\{x|\mathrm{e}\leq x<3\}$.

故选：C

2．已知复数 $z\cdot(1-2\mathrm{i})$ 在复平面内对应点的坐标为 $(3,1)$，则 $z=$（　　）

A．$\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}$　　B．$\frac{1}{5}+\mathrm{i}$　　C．$\frac{1}{5}-\mathrm{i}$　　D．$\frac{1}{5}-\frac{7}{5}\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】由已知复数 $z\cdot(1-2\mathrm{i})$ 在复平面内对应点的坐标为 $(3,1)$，

则 $z\cdot(1-2\mathrm{i})=3+\mathrm{i}$，

所以 $z=\frac{3+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\frac{1+7\mathrm{i}}{5}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}$.

故选：A.

3．$\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中 x^{10} 项的系数为（　　）

A．-240　　B．-20　　C．20　　D．240

【答案】D

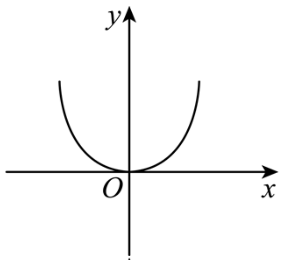
【解析】$\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\left(2x^3\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r2^{6-r}\mathrm{C}_6^rx^{18-4r}$

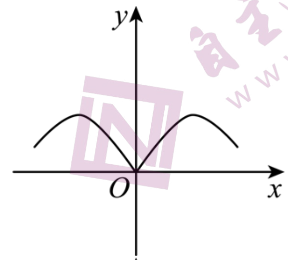
由 $18-4r=10$，可得 $r=2$，则 $(-1)^2 2^{6-2}\mathrm{C}_6^2=240$，

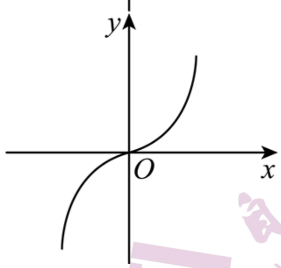
则$\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^6$展开式中$x^{10}$项的系数为240.

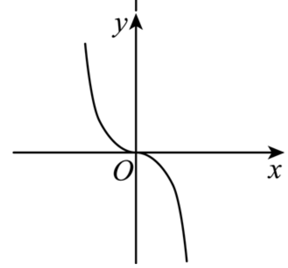
故选：D

4．函数$f\left(x\right)=\frac{x\left(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)}{2+\cos x}$的部分图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】根据题意，对于函数$f\left(x\right)=\frac{x\left(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)}{2+\cos x}$，

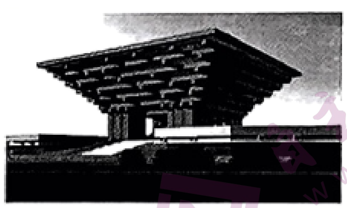
有函数$f\left(-x\right)=\frac{-x\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)}{2+\cos x}=-\frac{x\left(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)}{2+\cos x}=-f\left(x\right)$，

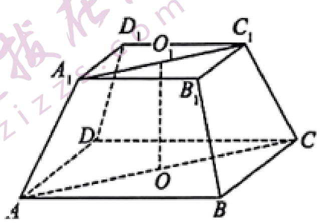
即函数$f\left(x\right)$为奇函数，图象关于原点对称，故排除 A、B ；

当$x>0$时，$\cos x\in[-1,1]$，则恒有$f\left(x\right)=\frac{x\left(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)}{2+\cos x}>0$，排除 D;

故选：C.

5．中国国家馆，以城市发展中的中华智慧为主题，表现出了“东方之冠，鼎盛中华，天下粮仓，富庶百姓”的中国文化精神与气质.如图，现有一个与中国国家馆结构类似的正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，上下底面的中心分别为O_1和O，若$AB=2A_1B_1=4$，$\angle A_1AB=60°$，则正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积为（　　）





A. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{20\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{28\sqrt{6}}{3}$

【答案】B

【解析】因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱台，$AB=2A_1B_1=4$，$\angle A_1AB=60°$，

侧面以及对角面为等腰梯形，故 $AA_1=\dfrac{\frac{1}{2}\left(AB-A_1B_1\right)}{\cos\angle A_1AB}=2$，$AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=2\sqrt{2}$，

$A_1O_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}A_1B_1=\sqrt{2}$，所以 $OO_1=\sqrt{AA_1^2-\left(AO-A_1O_1\right)^2}=\sqrt{2}$，

所以该四棱台的体积为 $V=\dfrac{1}{3}OO_1\cdot\left(S_{ABCD}+S_{A_1B_1C_1D_1}+\sqrt{S_{ABCD}S_{A_1B_1C_1D_1}}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(16+4+8)=\dfrac{28\sqrt{2}}{3}$，

故选：B.

6．公元 9 世纪，阿拉伯计算家哈巴什首先提出正割和余割概念，1551 年奥地利数学家、天文学家雷蒂库斯在《三角学准则》中首次用直角三角形的边长之比定义正割和余割，在某直角三角形中，一个锐角的斜边与其邻边的比，叫做该锐角的正割，用 sec（角）表示；锐角的斜边与其对边的比，叫做该锐角的余割，用 csc（角）表示，则 $\sqrt{3}\csc 20^\circ-\sec 20^\circ=$（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．8

【答案】C

【解析】依题意，20° 角可视为某直角三角形的内角，由锐角三角函数定义及已知得

$\csc 20^\circ=\dfrac{1}{\sin 20^\circ},\sec 20^\circ=\dfrac{1}{\cos 20^\circ}$，

所以 $\sqrt{3}\csc 20^\circ-\sec 20^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}-\dfrac{1}{\cos 20^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=\dfrac{2\sin(60^\circ-20^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}=4$．

故选：C

7．已知奇函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数为 $f'\left(x\right)$，且 $f\left(1-x\right)-f\left(1+x\right)+x=0$ 恒成立，则 $f'\left(2023\right)=$（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．0　　D．$-\dfrac{1}{2}$

【答案】B

【解析】设 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x$，则 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上可导的奇函数，$g(0)=0$，

由题意得 $f\left(1-x\right)-\dfrac{1}{2}(1-x)=f\left(1+x\right)-\dfrac{1}{2}(1+x)$，

得 $g(1-x)=g(1+x)$，所以 $g\left(x+2\right)=g\left(1+x+1\right)=g\left(-x\right)=-g\left(x\right)$，

$g\left(x+4\right)=g\left(x+2+2\right)=-g\left(x+2\right)=g\left(x\right)$，

又 $g(1-x)=g(1+x)$，即 $-g(1-x)=-g(1+x)$，

所以 $g(-1+x)=g(-1-x)$，等式两边对 x 求导，

得 $g'(-1+x)=-g'(-1-x)$，令 $x=0$，$g'(-1)=-g'(-1)$，所以 $g'(1)=0$．

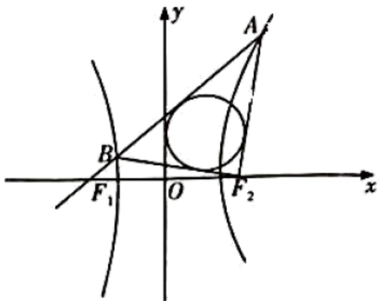
由 $g(x+4)=g(x)$，两边对 x 求导，$g'(x+4)=g'(x)$，所以 $g'(x)$ 的周期为 4，

所以 $g'(2023)=g'(-1)=0$，因为 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x$，所以 $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{2}$，

所以 $f'(2023)=g'(2023)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

故选：B

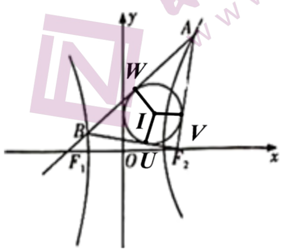
8．如图，已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1， F_2，过 F_1 的直线与 C 分别在第一、二象限交于 A,B 两点，$\triangle ABF_2$ 内切圆半径为 r，若 $|BF_1|=r=a$，则 C 的离心率为（　　）



A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{30}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{85}}{5}$

【答案】D

【解析】



设 $|AB|=x$，内切圆圆心为 I，内切圆在 BF_2,AF_2,AB 上的切点分别为 U,V,W，

则 $|BU|=|BW|,|AV|=|AW|,|F_2U|=|F_2V|$，

由 $|BF_1|=a$ 及双曲线的定义可知，

$|BF_2|=3a,|AF_2|=x-a,|F_2U|=|F_2V|=\frac{1}{2}\left(|BF_2|+|AF_2|-|AB|\right)=a=r$，

故四边形 IUF_2V 是正方形，

得 $AF_2\perp BF_2$，于是 $|BF_2|^2+|AF_2|^2=|AB|^2$，

故 $x^2=9a^2+(x-a)^2$，所以 $x=5a$，

于是 $\cos\angle F_1BF_2=\cos\left(\pi-\angle ABF_2\right)=-\frac{3}{5}$，在 $\triangle F_1BF_2$ 中，

由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2-2|BF_1|\cdot|BF_2|\cdot\cos\angle F_1BF_2=\frac{68}{5}a^2$，

从而 $4c^2=\frac{68}{5}a^2$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{85}}{5}$.

故选：D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要

求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．2023 年 10 月 3 日第 19 届杭州亚运会跳水女子 10 米跳台迎来决赛，中国“梦之队”包揽了该项目的冠亚军.已知某次跳水比赛中运动员五轮的成绩互不相等，记为 $x_i\left(i=1,2,3,4,5\right)$，平均数为 $\overline{x}$，若随机删去其任一轮的成绩，得到一组新数据，记为 $y_i\left(i=1,2,3,4\right)$，平均数为 $\overline{y}$，下面说法正确的是（　　）

A. 新数据的极差可能等于原数据的极差

B. 新数据的中位数可能等于原数据的中位数

C. 若 $\overline{x}=\overline{y}$，则新数据的方差一定大于原数据方差

D. 若 $\overline{x}=\overline{y}$，则新数据的第 40 百分位数一定大于原数据的第 40 百分位数

【答案】ABC

【解析】对于 A 中，若随机删去任一轮的成绩，恰好不是最高成绩和最低成绩，此时新数据的极差可能等于原数据的极差，所以 A 正确；

对于 B 中，不妨假设 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$，

当 $\frac{1}{2}\left(x_2+x_4\right)=x_3$ 时，若随机删去的成绩是 x_3，此时新数据的中位数等于原数据的中位数，所以 B 正确；

对于 C 中，若 $\overline{x}=\overline{y}$，即删去的数据恰为平均数，根据方差的计算公式，分子不变，分母变小，所以方差会变大，所以 C 正确；

对于 D 中，若 $\overline{x}=\overline{y}$，即删去的数据恰为平均数，在按从小到大的顺序排列的 5 个数据中，

因为 $5\times40\%=2$，此时原数据的 40% 分位数为第二数和第三个数的平均数；

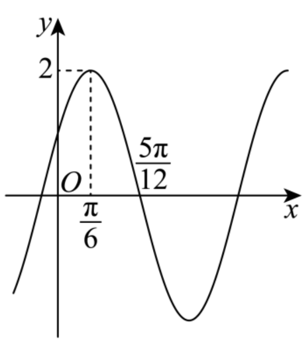
删去一个数据后的 4 个数据，从小到大的顺序排列，可得 $4\times40\%=1.6$，

此时新数据的 40% 分位数为第二个数，

显然新数据的 40% 分位数小于原数据的 40% 分位数，所以 D 错误.

故选：ABC.

10．已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示．则（　　）



A. $f(x)$ 的图象关于 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 中心对称

B. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$ 上单调递增

C. 函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到函数 $g\left(x\right)=2\sin 2x$ 的图象

D. 将函数 $f(x)$ 的图象所有点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$，得到函数 $h(x)=2\sin(4x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象

【答案】ABD

【解析】由图象可知 $A=2$，$\dfrac{T}{4}=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2\pi}{\omega}$，解得 $T=\pi,\omega=2$，

又 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2$，所以 $2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$，即 $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，结合 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，可知 $k=0,\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的表达式为 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

对于 A，由于 $f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，即 $f(x)$ 的图象关于 $\left(-\dfrac{\pi}{12},0\right)$ 中心对称，故 A 正确；

对于 B，当 $x\in\left[\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right]$ 时，$t=2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{7\pi}{2},\dfrac{25\pi}{6}\right]\subseteq\left[\dfrac{7\pi}{2},\dfrac{9\pi}{2}\right]$，由复合函数单调性可知 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right]$ 上单调递增，故 B 正确；

对于 C，函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到函数

$g\left(x\right)=2\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，故 C 错误；

对于 D，将函数 $f(x)$ 的图象所有点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$，得到函数 $h(x)=2\sin(4x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象，故 D 正确.

故选：ABD.

11．已知 P 是圆 $C:x^2+y^2=1$ 上一点，Q 是圆 $D:(x-3)^2+(y+4)^2=4$ 上一点，则（　　）

A. $|PQ|$ 的最小值为 2

B. 圆 C 与圆 D 有 4 条公切线

C. 当 $|PQ|$ 取得最小值时，P 点的坐标为 $(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5})$

D. 当 $|PQ|=1+\sqrt{21}$ 时，点 D 到直线 PQ 的距离小于 2

【答案】AB

【解析】C 的圆心 $C(0,0)$，半径 $r_1=1$，圆 D 的圆心 $D(3,-4)$，半径 $r_2=2$，则 $|CD|=5$，圆 C 与圆 D 外离，

因此 $|PQ|$ 的最小值为 $|CD|-1-2=2$，圆 C 与圆 D 有 4 条公切线，AB 正确；

直线 CD 的方程为 $y=-\dfrac{4}{3}x$，代入 $x^2+y^2=1$，得 $x=\pm\dfrac{3}{5}$，当 $|PQ|$ 取得最小值时，

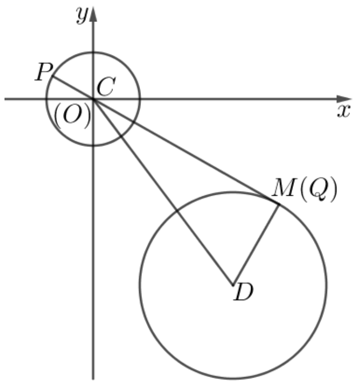
P 为线段 CD 与圆 C 的交点，因此 P 点的坐标为 $(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5})$，C 错误；

过点 C 作圆 D 的切线，切点为 M，则 $|CM|=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$，

当 P 为线段 MC 的延长线与圆 C 的交点，且点 Q 与 M 重合时，$|PQ|=1+\sqrt{21}$，

此时点 D 到直线 PQ 的距离等于 2，D 错误.

故选：AB



12．已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 2，下列说法正确的是（　　）

A．正四面体 $P-ABC$ 的外接球表面积为 6π

B．正四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离之和为定值

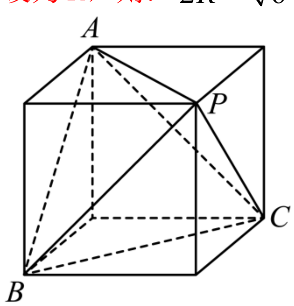
C．正四面体 $P-ABC$ 的相邻两个面所成二面角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$

D．正四面体 $Q-MNG$ 在正四面体 $P-ABC$ 的内部，且可以任意转动，则正四面体 $Q-MNG$ 的体积最大值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{81}$

【答案】ABD

【解析】A.棱长为 2 的正四面体 $P-ABC$ 的外接球与棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体的外接球半径相同，

设为 R，则：$2R=\sqrt{6}$，所以 $S=4\pi R^2=6\pi$，所以 A 对.



B.设正四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离分别为 d_1，d_2，d_3，d_4，

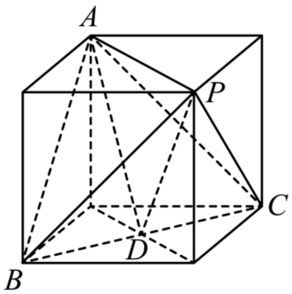
设正四面体 $P-ABC$ 的高为 d，由等体积法可得：$\dfrac{1}{3}S(d_1+d_2+d_3+d_4)=\dfrac{1}{3}Sd$，

所以 $d_1+d_2+d_3+d_4=d$ 为定值，所以 B 对.

C.设 BC 中点为 D，连接 PD，AD，则 $AD\perp BC, PD\perp BC$，

则 $\angle PDA$ 为所求二面角的平面角，$AP=2, PD=AD=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle PDA=\dfrac{3+3-4}{6}=\dfrac{1}{3}$，所以正弦值为 $\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 C 错.

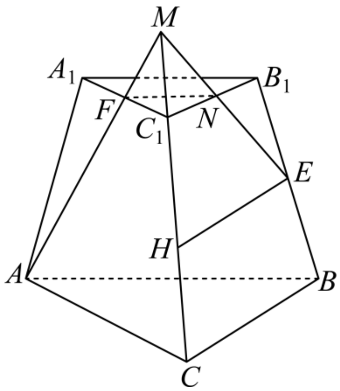


D.要使正四面体$Q-MNG$在四面体$P-ABC$的内部，且可以任意转动，
则正四面体$Q-MNG$的外接球在四面体$P-ABC$内切球内部，
当正四面体$Q-MNG$的外接球恰好为四面体$P-ABC$内切球时，
正四面体$Q-MNG$的体积最大值，
由于正四面体的外接球与内切球半径之比为$\frac{1}{3}$，
所以正四面体$Q-MNG$的外接球半径为$\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，
设正四面体$Q-MNG$的边长为a，则$\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=2\times\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以$a=\frac{2}{3}$，
故体积$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{2\sqrt{2}}{81}$，所以 D 对.
故选：ABD
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.
13．已知等差数列$\{a_n\}$前 3 项和$S_3=12$，a_1-1，a_2-1，a_3+3成等比数列，则数列$\{a_n\}$的公差$d=$________________.
【答案】-6或2
【解析】由$S_3=12$，可知$a_1+a_2+a_3=3a_2=12$，即$a_2=4$，
又a_1-1，a_2-1，a_3+3成等比数列，
所以$(a_2-1)^2=(a_1-1)\cdot(a_3+3)=(a_2-d-1)\cdot(a_2+d+3)$，
即$9=(3-d)\cdot(7+d)$，解得$d=2$或$d=-6$，
故答案为：-6或 2
14. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}^2=2$，且$\vec{a}=(-1,1)$，则向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为__________.
【答案】$(-2,2)$
【解析】由$\vec{a}=(-1,1)$，得$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，
又$\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}^2=2$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，
所以向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\times\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(-2,2)$，
故答案为：$(-2,2)$
15. 正三棱台$A_1B_1C_1-ABC$中，$A_1B_1=1$，$AB=AA_1=2$，点E，F分别为棱BB_1，A_1C_1的中点，

若过点A，E，F 作截面，则截面与上底面 $A_1B_1C_1$ 的交线长为________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{31}}{10}$

【解析】连接 AF 并延长交 CC_1 的延长线于点 M，连接 ME 交 B_1C_1 于点 N，连接 FN，如图，



则线段 FN 即为截面 AEF 与上底面 ABC 的交线，

因为 F 为 A_1C_1 的中点，$\dfrac{FC_1}{AC}=\dfrac{MC_1}{MC}=\dfrac{\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{1}{4}$，

所以 $MC_1=\dfrac{1}{3}CC_1=\dfrac{2}{3}$.

过点 E 作 BC 的平行线交 CC_1 于点 H，

因为 $HE=\dfrac{1}{2}\left(BC+B_1C_1\right)=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{MC_1}{MH}=\dfrac{C_1N}{HE}=\dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{5}$，

所以 $C_1N=\dfrac{2}{5}HE=\dfrac{3}{5}$，

在 $\triangle C_1FN$ 中，

$$FN=\sqrt{C_1F^2+C_1N^2-2C_1F\cdot C_1N\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{25}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{31}}{10}.$$

故答案为：$\dfrac{\sqrt{31}}{10}$

16．已知函数 $f\left(x\right)=x\left(e^{x-1}-2a\right)-\ln x$ 的最小值为0，则 a 的值为________.

【答案】$\frac{1}{2}$##0.5

【解析】由 $f'\left(x\right)=(x+1)e^{x-1}-\dfrac{1}{x}-2a$，且 $x\in(0,+\infty)$，

令 $g(x)=f'\left(x\right)$，则 $g'(x)=(x+2)e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

所以 $f'\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，又 $x\to0^+$，$f'(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$，$f'(x)\to+\infty$，

所以，$\exists x_0 \in (0,+\infty)$ 使 $f'(x_0)=(x_0+1)e^{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0}-2a=0$，且 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，

$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0\left(e^{x_0-1}-2a\right)-\ln x_0=0$

由 $\begin{cases}(x_0+1)e^{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0}=2a \\ x_0\left(e^{x_0-1}-2a\right)=\ln x_0\end{cases}$，得 $x_0^2e^{x_0-1}+\ln x_0=1$，

令函数 $t(x)=x^2e^{x-1}+\ln x$，$t'(x)=(x^2+2x)e^{x-1}+\dfrac{1}{x}>0$，

所以 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，注意到 $t(1)=1$，所以 $x_0=1$，

所以 $2a=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

故答案为：$\dfrac{1}{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $2\sqrt{S_n}=a_n+1$，$n\in N^*$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+\dfrac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 和 T_n.

【答案】（1）$a_n=2n-1$，$n\in N^*$　　（2）$T_n=n^2+\dfrac{2n}{2n+1}$

【解析】（1）由 $2\sqrt{S_n}=a_n+1$ 得 $S_n=\dfrac{1}{4}(a_n+1)^2$，则 $a_1=\dfrac{1}{4}(a_1+1)^2$，解得 $a_1=1$，

当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=\dfrac{1}{4}(a_{n-1}+1)^2$，所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{4}(a_n+1)^2-\dfrac{1}{4}(a_{n-1}+1)^2$，

整理得 $(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1})$，

因为 $\{a_n\}$ 是正项数列，所以 $a_n+a_{n-1}>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2$，

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列，

所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$，$n\in N^*$.

（2）由（1）可得，$a_n=2n-1$，

所以 $b_n=a_n+\dfrac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}=2n-1+\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}=2n-1+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$，

所以 $T_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}+\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=n^2+1-\dfrac{1}{2n+1}=n^2+\dfrac{2n}{2n+1}$.

18．记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\dfrac{1-\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$．

（1）求$A+2B$的值；

（2）若$a^2+2c^2\geq \lambda b^2$，求λ的最大值．

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{2}$　　（2）2

【解析】（1）

因为$\dfrac{1-\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，

所以$\cos B-\sin A\cos B=\sin B\cos A$，

所以$\cos B=\sin\left(A+B\right)=\sin C$，

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)=\sin C$，

因为$0<C<\pi$，$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}-B<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\dfrac{\pi}{2}-B=C$（舍），或$\dfrac{\pi}{2}-B=\pi-C$，

所以$A+2B=\pi-C+B=\dfrac{\pi}{2}$．

（2）要使不等式$a^2+2c^2\geq \lambda b^2$恒成立，只需要$\lambda\leq\left(\dfrac{a^2+2c^2}{b^2}\right)_{\min}$即可，

由（1）可知$C=B-\dfrac{\pi}{2}$，$A=\dfrac{\pi}{2}-2B$，

∴由正弦定理得$\dfrac{a^2+2c^2}{b^2}=\dfrac{\sin^2 A+2\sin^2 C}{\sin^2 B}$，

$$=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-2B\right)+2\sin^2\left(B-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2 B}=\frac{\cos^2 2B+2\cos^2 B}{\sin^2 B}$$

$$=\frac{\left(1-2\sin^2 B\right)^2+2\left(1-\sin^2 B\right)}{\sin^2 B}=4\sin^2 B+\frac{3}{\sin^2 B}-6,$$

因为$\dfrac{1-\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，

所以A，B都为锐角，

又因为$A+2B=\dfrac{\pi}{2}$，

所以$0<B<\dfrac{\pi}{4}$．

所以$0<\sin^2 B<\dfrac{1}{2}$时，

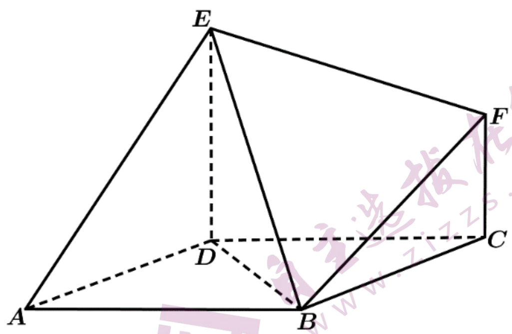
由对勾函数的性质知，$4\sin^2 B+\dfrac{3}{\sin^2 B}-6$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，

当 $\sin^2 B=\dfrac{1}{2}$ 时，$4\sin^2 B+\dfrac{3}{\sin^2 B}-6$ 取得最小值为 $4\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{\frac{1}{2}}-6=2$，

由 $\sin^2 B\neq\dfrac{1}{2}$，得 $4\sin^2 B+\dfrac{3}{\sin^2 B}-6>2$ 即 $\lambda\le 2$.

所以 λ 的最大值为 2.

19．如图，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^\circ$，$DE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF//DE$，$DE=2CF$，BE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°.



（1）求证：平面 $BEF\perp$ 平面 BDE；

（2）求二面角 B-EF-D 的余弦值.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】（1）∵ $DE\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$.

∴ $DE\perp AC$.

又∵底面 $ABCD$ 是菱形，∴ $AC\perp BD$.

∵ $BD\cap DE=D$，∴ $AC\perp$ 平面 BDE，

设 AC，BD 交于 O，取 BE 的中点 G，连 FG，OG，

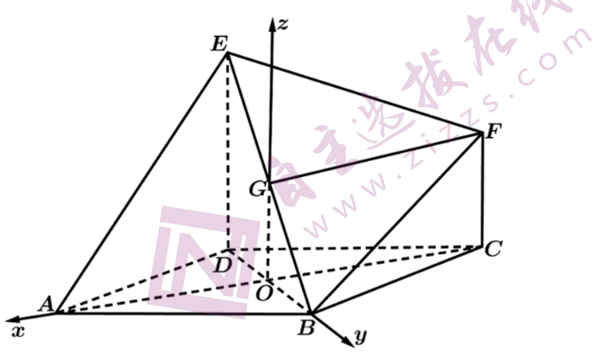
$OG//CF$，$OG=CF$，四边形 $OCFG$ 是平行四边形

$FG//AC$，$AC\perp$ 平面 BDE

∴ $FG\perp$ 平面 BDE，

又因 $FG\subset$ 平面 BEF，

∴平面 $BEF\perp$ 平面 BDE.



（2）以 O 为坐标原点，OA，OB，OG 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如图空间直角坐标系

$\because BE$ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$，$\angle BAD=60°$

$DE=BD=AB=2$，$OA=\sqrt{3}$

$D(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$E(0,-1,2)$，$F(-\sqrt{3},0,1)$.

$\overrightarrow{BE}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{3},-1,1)$

设平面 BEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\begin{cases}-2y+2z=0\\-\sqrt{3}x-y+z=0\end{cases}$，$\vec{n}=(0,1,1)$

$\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,0,2)$

设平面 $CDEF$ 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\z=0\end{cases}\Rightarrow \vec{m}=(1,\sqrt{3},0)$$

设二面角 $B-EF-D$ 的大小为 θ.

$$\cos\theta=|\cos<\vec{n},\vec{m}>|=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

20．“村 BA”后，贵州“村超”又火出圈!所谓“村超”，其实是目前火爆全网的贵州乡村体育赛事一一榕江（三宝侗寨）和美乡村足球超级联赛，被大家简称为“村超”．“村超”的民族风、乡土味、欢乐感，让每个人尽情享受着足球带来的快乐.

某校为了丰富学生课余生活，组建了足球社团.足球社团为了解学生喜欢足球是否与性别有关，随机抽取了男、女同学各 50 名进行调查，部分数据如表所示：

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生		20	
女生	15		
合计			100

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

（1）根据所给数据完成上表，依据 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，能否有 99.5% 的把握认为该中学学生喜欢足球与性别有关？

（2）社团指导老师从喜欢足球的学生中抽取了 2 名男生和 1 名女生示范定点射门.据统计，这两名男生进球的概率均为 $\dfrac{2}{3}$，这名女生进球的概率为 $\frac{1}{2}$，每人射门一次，假设各人进球相互独立，求 3 人进球总次数 X 的分布列和数学期望.

【答案】（1）有99.5%的把握认为该中学学生喜欢足球与性别有关

（2）分布列见解析，$E(X)=\frac{11}{6}$

【解析】（1）

依题意，2×2 列联表如下：

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生	30	20	50
女生	15	35	50
合计	45	55	100

零假设 H_0：该中学学生喜欢足球与性别无关，

χ^2 的观测值为 $\chi^2=\frac{100\times(30\times35-15\times20)^2}{50\times50\times45\times55}=\frac{100}{11}\approx9.091$，

$9.091>7.879=x_{0.005}$，根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，

所以有99.5%的把握认为该中学学生喜欢足球与性别有关.

（2）依题意，X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$，

$$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{18},P(X=1)=\mathrm{C}_2^1\times\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18},$$

$$P(X=2)=\mathrm{C}_2^1\times\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{18}=\frac{4}{9},P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

数学期 $E(X)=0\times\frac{1}{18}+1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{2}{9}=\frac{11}{6}$.

21．已知函数 $f(x)=ax\mathrm{e}^x(a\neq0)$，$g(x)=-x^2$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有公切线，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）答案见解析；（2）$\left[-\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$

【解析】（1）由函数 $f(x)=ax\mathrm{e}^x(a\neq0)$，可得 $f'(x)=a(x+1)\mathrm{e}^x$，

当 $a>0$ 时，可得 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$x\in(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $a<0$ 时，可得 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$x\in(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

（2）解：设公切线与 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的切点分别为 $(x_1,ate^{x_1}),(b,-b^2)$，

可得 $k=f'(x_1)=a(x_1+1)\mathrm{e}^{x_1}$，可得切线方程为 $y-ate^{x_1}=a(x_1+1)\mathrm{e}^{x_1}(x-x_1)$，

即 $y=a(x_1+1)\mathrm{e}^{t}x_1+ate^{x_1}-a(x_1^2+t)\mathrm{e}^{x_1}$，即 $y=a(x_1+1)\mathrm{e}^{x_1}x-ax_1^2\mathrm{e}^{x_1}$

由 $g(x)=-x^2$，可得 $g'(x)=-2x$，则 $k=2b$，所以切线方程为 $y=-2bx+b^2$

所以 $\begin{cases}-2b=a(x_1+1)\mathrm{e}^{x_1}\\ b^2=-ax_1^2e^{x_1}\end{cases}$，可得 $-a=\dfrac{4x_1^2}{(x_1+1)^2\mathrm{e}^{x_1}},(x_1>0)$，

设 $h(x)=\dfrac{4x^2}{(x+1)^2\mathrm{e}^{x}},(x_1>0)$，可得 $h'(x)=\dfrac{-4x(x+2)(x-1)}{(x+1)^3\mathrm{e}^{x}}$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

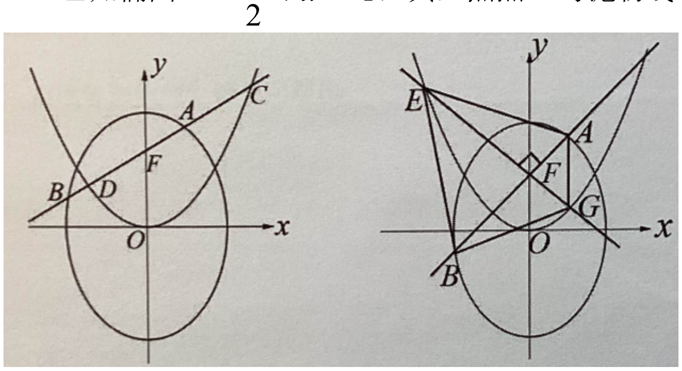
当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

所以，当 $x=1$ 时，函数 $h(x)$ 取得极大值，极大值为 $h(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

又由当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to 0$；当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to 0$，

所以 $0<h(x)\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $0<-a\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，即实数 a 的取值范围为 $\left[-\dfrac{1}{\mathrm{e}},0\right)$.

22．已知椭圆 T：$\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$，其上焦点 F 与抛物线 K：$x^2=4y$ 的焦点重合.



（1）若过点 F 的直线交椭圆 T 于点 A、B，同时交抛物线 K 于点 C、D（如图 1 所示，点 C 在椭圆与抛物线第一象限交点上方），试证明：线段 AC 大于 BD 长度的大小；

（2）若过点 F 的直线交椭圆 T 于点 A、B，过点 F 与直线 AB 垂直的直线 EG 交抛物线 K 于点 E、G（如图 2 所示），试求四边形 $AEBG$ 面积的最小值.

【答案】（1）证明见解析　（2）$4\sqrt{2}$

【解析】（1）由题意得过点 F 的直线 AB 的斜率存在，设直线 AB 方程为 $y=kx+1$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+1\\ \dfrac{y^2}{2}+x^2=1\end{cases}$，消去 y 得：$(2+k^2)x^2+2kx-1=0$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{2k}{2+k^2}$， $x_1x_2=-\dfrac{1}{2+k^2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)\left[\left(-\dfrac{2k}{2+k^2}\right)^2-4\left(-\dfrac{1}{2+k^2}\right)\right]}=\dfrac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2+k^2}$.

抛物线 K 的方程为： $x^2=4y$，

联立 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2=4y \end{cases}$， 消去 y 得： $x^2-4kx-4=0$，

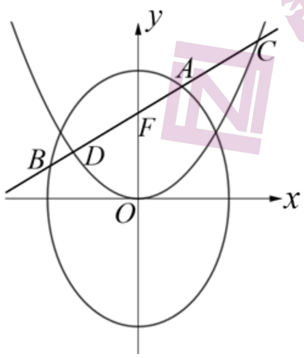
则 $x_3+x_4=4k, x_3x_4=-4$，

所以 $|CD|=\sqrt{(1+k^2)(16k^2+16)}=4(1+k^2)$，

所以 $|AC|-|BD|=(|AC|+|AD|)-(|BD|+|AD|)=|CD|-|AB|$

$$=4(1+k^2)-\frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2+k^2}=\frac{2(1+k^2)(2k^2+4-\sqrt{2})}{2+k^2}>0,$$

即 $|AC|>|BD|$.



（2）设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， $E(x_5,y_5)$， $G(x_6,y_6)$，

当直线 AB 的斜率存在且不为零时，

设直线 AB 方程为 $y=kx+1(k\neq 0)$，

则直线 EG 方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x+1$，

由（1）的过程可知： $|AB|=\dfrac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2+k^2}$，

由 $|CD|=4(1+k^2)$， 以 $-\dfrac{1}{k}$ 替换 k， 可得 $|EG|=4\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)$，

所以 $S_{四边形AEBG}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|EG|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2+k^2}\times\left[4\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)\right]=\dfrac{4\sqrt{2}(1+k^2)^2}{k^2(2+k^2)}$

$$=\frac{4\sqrt{2}(1+k^2)^2}{(1+k^2)^2-1}=\frac{4\sqrt{2}}{1-\dfrac{1}{(1+k^2)^2}},$$

因为$1+k^2>1$，所以$\frac{1}{\left(1+k^2\right)^2}\in(0,1)$，$1-\frac{1}{\left(1+k^2\right)^2}\in(0,1)$，$S_{AEBG}=\frac{4\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\left(1+k^2\right)^2}}>4\sqrt{2}$；

当直线AB的斜率不存在时，$|AB|=2\sqrt{2}$，$|EG|=4$，

所以$S_{四边形AEBG}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|EG|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times4=4\sqrt{2}$；

综上所述：$S_{四边形AEBG}\geq4\sqrt{2}$，所以四边形$AEBG$面积的最小值为$4\sqrt{2}$.