数学参考答案

一、单选题

1. A　2. B　3. C　4. A　5. D　6. D　7. C　8. B

二、多选题

9. BCD　　10. AC　　11. AD　　12. AD

三、填空题

13. $y=x+1$　　14. 104　　15. $\left[\frac{13}{2},+\infty\right)$　　16. $-\frac{4}{5}$

选填题部分解析：

11. 由 $a_{n+1}=2a_n^2-2a_n+1$ 可得 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=2a_n^2-2a_n+\frac{1}{2}=2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$，若 $a_{n+1}=\frac{1}{2}$，则 $a_n=\frac{1}{2}$，

以此类推，$a_{n-1}=\frac{1}{2},\cdots,a_1=\frac{1}{2}$，与已知条件矛盾．故 $a_{n+1}>\frac{1}{2}$，又 $a_1=\frac{2}{3}$，所以 A 正确．

由 $a_{n+1}=2a_n^2-2a_n+1$ 可得 $a_{n+1}-1=2a_n(a_n-1)$，因为 $a_n>\frac{1}{2}$，若 $a_{n+1}\ge 1$，则 $a_n\ge 1$，以此类推，$a_{n-1}\ge 1,\cdots,a_1\ge 1$，与已知条件矛盾．故 $a_{n+1}<1$，又 $a_1=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{1}{2}<a_n<1$ 恒成立．则 $a_{n+1}-a_n=2a_n^2-3a_n+1=(2a_n-1)(a_n-1)<0$，$\{a_n\}$ 是递减数列，所以 B 错．

代入 $a_{n+1}=2a_n^2-2a_n+1$ 中可知 C 不成立（或者取 $n=4$ 验证可知 C 不成立），所以 C 错．

由 $a_{n+1}-1=2a_n(a_n-1)$，$2a_n=\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}$，利用累乘法可得：

$2^nT_n=\frac{a_2-1}{a_1-1}\cdot\frac{a_3-1}{a_2-1}\cdots\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=\frac{a_{n+1}-1}{a_1-1}=3(1-a_{n+1})$，因为 $a_{n+1}>\frac{1}{2}$，所以 $2^nT_n<\frac{3}{2}$，则 $T_n<\frac{3}{2^{n+1}}$．所以 D 正确．

另解：由 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2$，左右两边同时取对数，$\lg\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}\right)=2\lg\left(a_n-\frac{1}{2}\right)+\lg 2$，令 $\lg\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=b_n$，利用待定系数法可以求得 $b_n=-2^{n-1}\lg 3-\lg 2=-\lg\left(2\cdot 3^{2^{n-1}}\right)$，代入 $\lg\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=b_n$，

则 $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^{2^{n-1}}}$．可依据 $\{a_n\}$ 的通项公式来判断 B、C 均错．

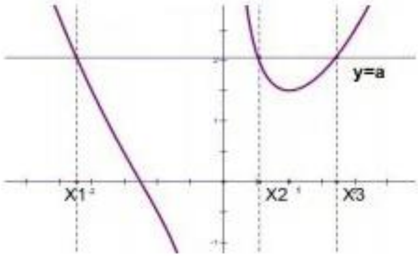
12. $f'(x)=x-\frac{1}{x^2}=\frac{x^3-1}{x^2}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增，因为 $f(1)=\frac{3}{2}$，

由函数图象可知 $a>\dfrac{3}{2}$ 时符合题意，故 A 正确. 由图可知 $x_1<-2<0<x_2<1<x_3$，则 $-1-x_1>1$，

$f(x_3)-f(-1-x_1)=f(x_1)-f(-1-x_1)=(2x_1+1)\left[\dfrac{1}{x_1(x_1+1)}-\dfrac{1}{2}\right]>0$，因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，由 $f(x_3)>f(-1-x_1)$ 可得 $x_3>-1-x_1$，故 B 错. 由 $\dfrac{x_1^2}{2}+\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{x_2^2}{2}+\dfrac{1}{x_2}$ 可得 $x_1+x_2=\dfrac{2}{x_1x_2}$，由图象可知 $x_1+x_2<-1$，即 $\dfrac{2}{x_1x_2}<-1$，解得 $-2<x_1x_2<0$，故 C 错.

由 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(x_1+x_2)^2-\dfrac{8}{x_1+x_2}$，令 $t=x_1+x_2$，则 $(x_1-x_2)^2=t^2-\dfrac{8}{t}(t<-1)$，

构造 $f(t)=t^2-\dfrac{8}{t}(t<-1)$，通过求导可知 $f(t)_{\min}=f\left(-4^{\frac{1}{3}}\right)=3\sqrt[3]{16}$.故 D 正确.



四、解答题

17.（1）在 ΔABC 中用余弦定理，$\cos\angle BAC=\dfrac{2^2+4^2-3^2}{2\times2\times4}=\dfrac{11}{16}$，$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$. （5 分）

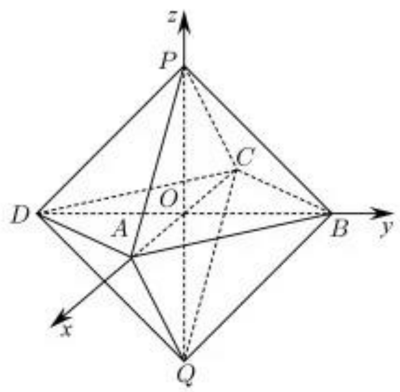
（2）因为 $\cos\angle BAC=1-2\sin^2\angle CAD=\dfrac{11}{16}$，解得 $\sin\angle CAD=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$，

因为 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，在 ΔABD 和 ΔADC 中分别用正弦定理可得 $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$①，$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$②，①÷②可得 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{2}{1}$（角平分线的性质不证明不扣分），又 $BC=3$，所以 $CD=2$.（8 分）

在 ΔADC 中用正弦定理，$\dfrac{4}{\sin\angle ADC}=\dfrac{2}{\sin\angle CAD}$，解得 $\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. （10 分）

18. 解：（1）由正四棱锥 $P-ABCD$ 可知 $AB//CD$， $AB\not\subset$ 面 PCD，所以 $AB//$ 面 PCD，由线面平行的性质定理，面 PAB 与面 PCD 的交线 $l//AB$．又因为 $l\not\subset$ 面 QAB 且 $AB\subset$ 平面 QAB，由线面平行的判定定理，$l//$ 面 QAB． （6 分）

（2）由题设知，$ABCD$ 是正方形，所以 $AC\perp BD$．由正四棱锥的性质，$PQ\perp$ 平面 $ABCD$，取 $ABCD$ 中心为 O，故可以分别以直线 OA、OB、OP 为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系（如图），



由题设条件，相关各点的坐标分别是 $P\left(0,0,\sqrt{2}\right)$，$Q\left(0,0,-\sqrt{2}\right)$，$A\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$B\left(0,\sqrt{2},0\right)$，所以

$\overrightarrow{PA}=\left(\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{QA}=\left(\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{QB}=\left(0,\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，设平面 QAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{QA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{QB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}z=0\\ \sqrt{2}y+\sqrt{2}z=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=(1,1,-1)$．设 PA 与平面 QAB 所成角为 θ，则

$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{PA}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.所以 PA 与平面 QAB 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． （12 分）

19. （1）甲获胜分三种情况：胜胜，胜平，平胜.
则甲获胜的概率为 $P=0.4\times0.6+0.4\times0.2+0.1\times0.6=0.38$． （6 分）
（2）X 所有可能取值为 0，2，4，5，7，10.

$P(X=0)=0.5\times0.2=0.1$， $P(X=2)=0.1\times0.2+0.5\times0.2=0.12$， $P(X=4)=0.1\times0.2=0.02$，

$P(X=5)=0.4\times0.2+0.5\times0.6=0.38$，$P(X=7)=0.4\times0.2+0.1\times0.6=0.14$，$P(X=10)=0.4\times0.6=0.24$.

P	0	2	4	5	7	10
X	0.1	0.12	0.02	0.38	0.14	0.24

$E(X)=0\times0.1+2\times0.12+4\times0.02+5\times0.38+7\times0.14+10\times0.24=5.6$ （12分）

20.（1）因为$2S_n=n(a_n-13)$，用$n-1$代替n可得$2S_{n-1}=(n-1)(a_{n-1}-13)$（$n\geq2$），

两式相减：$2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}-13$，整理得：$\dfrac{a_n}{n-1}=\dfrac{a_{n-1}}{n-2}+\dfrac{13}{(n-1)(n-2)}$（$n\geq3$），即

$\dfrac{a_n+13}{n-1}=\dfrac{a_{n-1}+13}{n-2}(n\geq3)$，则$\dfrac{a_n+13}{n-1}=a_2+13=2(n\geq2)$，解得$a_n=2n-15(n\geq2)$，因为$2S_1=a_1-13$，所以$a_1=-13$，也满足上式，故对于任意的$n\in N_+$，$a_n=2n-15$.（通过不完全归纳法猜出通项的只得3分） （6分）

（2）$b_n=\dfrac{1}{(2n-15)(2n-13)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-15}-\dfrac{1}{2n-13}\right)$，当$n=7$时，$b_n<0$，当$n\neq7$时，$b_n>0$.

记$\{|b_n|\}$前n项和为T_n，当$n\leq6$时，$T_n=\sum_{i=1}^{n}b_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{-13}-\dfrac{1}{-11}+\dfrac{1}{-11}-\dfrac{1}{-9}+\cdots+\dfrac{1}{2n-15}-\dfrac{1}{2n-13}\right)$，化简得

$T_n=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{2n-13}\right)=\dfrac{-n}{13(2n-13)}$， （9分）

当$n\geq7$时，$T_n=\sum_{i=1}^{n}b_n-2b_7=-\dfrac{1}{26}-\dfrac{1}{4n-26}-2\times(-1)=\dfrac{-n}{13(2n-13)}+2$. （11分）

综上所述，$T_n=\begin{cases}\dfrac{-n}{13(2n-13)}, & n\leq6\\ \dfrac{-n}{13(2n-13)}+2, & n\geq7\end{cases}$. （12分）

21、（1）$f'(x)=e^x-2$，令$f'(x)=0$得$x=\ln2$，当$x<\ln2$时，$f'(x)<0$，当$x>\ln2$时，$f'(x)>0$.
所以$f(x)$在$(-\infty,\ln2)$上单调递减，在$(\ln2,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)_{\min}=f(\ln2)=2-2\ln2+a$，因为$f(x)\geq0$恒成立，所以$f(x)_{\min}\geq0$，即$2-2\ln2+a\geq0$，解得$a\geq2\ln2-2$. （5分）

（2）$e^x-2x\geq ex-2\ln x-2$，则$f(x)\geq f(\ln x+1)$， （7分）

因为$x\geq\ln x+1$，当$x\geq\ln x+1\geq\ln2$时，由（1）知$f(x)$在$[\ln2,+\infty)$单调递增，$f(x)\geq f(\ln x+1)$成立，此时$x\geq\dfrac{2}{e}$（且$x=\dfrac{2}{e}$时，不等式$f(x)\geq f(\ln x+1)$中等号不成立）；

当$1+\ln x\le x\le \ln 2$时，由（1）知$f(x)$在$(-\infty,\ln 2]$单调递减，$f(x)\le f(\ln x+1)$，不符合题意，此时$x\le \ln 2$；

当$1+\ln x<\ln 2<x$时，易知$f(x)\ge f(\ln x+1)$有解；

因为$f(x)\ge f(\ln x+1)$的解集为$\{x\mid x\ge t\}$，则$\ln 2<t<\dfrac{2}{e}$，所以$[et]\in(e\ln 2,2)$，即$[et]=1$.（12 分）

22、（1）因为准线方程为$y=-1$，所以$\dfrac{p}{2}=1$，解得$p=2$，抛物线C的方程为$x^2=4y$.　（3 分）

（2）设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，对$x^2=4y$求导可得MP：$x_1x=2(y+y_1)$，$NP:x_2x=2(y+y_2)$，因为两切线均经过$P(x_0,y_0)$，所以$\begin{cases}x_0x_1=2(y_0+y_1)\\x_0x_2=2(y_0+y_2)\end{cases}$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$均在直线$x_0x=2(y+y_0)$上，

可知MN：$x_0x=2(y+y_0)$，则MN与y轴的交点坐标为$T(0,-y_0)$.

联立$\begin{cases}x_0x=2(y+y_0)\\x^2=4y\end{cases}$整理得$x^2-2x_0x+4y_0=0$，由韦达定理，$x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0$，则$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{x_0^2-4y_0}$，又因为$P(x_0,y_0)$在圆$x^2+(y+2)^2=1$，则${x_0}^2+(y_0+2)^2=1$，代入可得$|x_1-x_2|=2\sqrt{-y_0^2-8y_0-3}$，

$S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}\cdot|x_1-x_2|\cdot|OT|=\sqrt{-y_0^4-8y_0^3-3y_0^2}$，$y_0\in[-3,-1]$.　（9 分）

构造$f(x)=x^4+8x^3+3x^2,x\in[-3,-1]$，$f'(x)=4x^3+24x^2+6x$，易知$f'(x)>0$在$[-3,-1]$上恒成立，故$f(x)$在$[-3,-1]$上单调递增，当$x=-3$时，$f(x)$取得最小值，此时$S_{\Delta OMN}$取到最大值$6\sqrt{3}$，点$P$的坐标为$(0,-3)$.　（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。