绝密★启用前

天一大联考

2023—2024学年高中毕业班阶段性测试(四)

数　学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

装　订　线

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$A=\{x\in \mathbf{Z}\mid 1<x\leqslant 4\}$,$B=\{x\in \mathbf{Z}\mid x^2-8x+12<0\}$,则$A\cup B$的子集的个数为

A. 7　　B. 8　　C. 15　　D. 16

2. 已知复数z满足$z(1+4\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$,则$z=$

A. $\frac{6}{17}+\frac{7}{17}\mathrm{i}$　　B. $\frac{6}{17}-\frac{7}{17}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{6}{17}+\frac{7}{17}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{6}{17}-\frac{7}{17}\mathrm{i}$

3. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$\frac{S_7}{7}-\frac{S_3}{3}=4$,则$a_9-a_6=$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

4. 已知非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$,且$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 已知函数$f(x)=(x+a)|x-1|$的单调递减区间为$(1,2)$,则实数a的值为

A. -3　　B. -2　　C. 1　　D. 2

6. 已知命题p:$\exists\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$(\cos\theta)^{\sin\theta}\leqslant(\sin\theta)^{\cos\theta}$,则

A. $\neg p$:$\exists\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$(\cos\theta)^{\sin\theta}>(\sin\theta)^{\cos\theta}$,且$\neg p$是真命题

B. $\neg p$:$\forall\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$(\cos\theta)^{\sin\theta}>(\sin\theta)^{\cos\theta}$,且$\neg p$是假命题

C. $\neg p$:$\exists\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$(\cos\theta)^{\sin\theta}>(\sin\theta)^{\cos\theta}$,且$\neg p$是假命题

D. $\neg p$:$\forall\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$(\cos\theta)^{\sin\theta}>(\sin\theta)^{\cos\theta}$,且$\neg p$是真命题

7. 已知圆锥 SO_1 的高为 4，体积为$\frac{32\pi}{3}$，若圆锥的顶点 S 与底面圆周上的所有点均在球 O 上，则球 O 的体积为

A. 18π　　B. 24π　　C. 36π　　D. 48π

8. 已知 $f(x)$ 为偶函数，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+2)=f(x)-f(1)$，当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=4x-2$，则方程 $f(x)=\log_2|x-1|$ 的所有实根之和为

A. 3　　B. 6　　C. 7　　D. 8

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在实际应用中，通常用吸光度 A 和透光率 T 来衡量物体的透光性能，它们之间的换算公式为 $A=\lg\frac{1}{T}$，下表为不同玻璃材料的透光率：

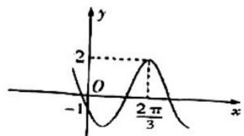
玻璃材料	材料 1	材料 2	材料 3
T	0.7	0.8	0.9

设材料 1、材料 2、材料 3 的吸光度分别为 A_1,A_2,A_3，则

A. $A_1>A_2$　　B. $A_2>3A_3$

C. $A_1+A_3>2A_2$　　D. $A_1A_3>A_2^2$

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图，则



A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 将 $f(x)$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到一个偶函数的图象

C. $f(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 上有 3 个零点

D. $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$

11. 已知函数 $f(x)=x^3+3x^2+bx+1$ 的导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点，则

A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 中心对称

C. 若 $a+c>-2$，则 $f(a)+f(c)>0$

D. 过坐标原点仅有一条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2^{n-2},n\geqslant 2,\end{cases}$ 其前 n 项和为 S_n. 对任意正整数 m，设 $m=\sum_{i=1}^{k}b_i(S_i-1)$，其中 $b_i\in\{0,1\}$，记 $f(m)=b_1+b_2+\cdots+b_k$，则

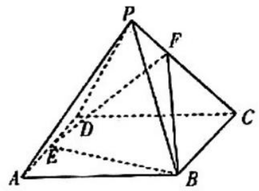
A. $S_n=\begin{cases}2,n=1,\\2^n-1,n\geqslant 2\end{cases}$　　B. $S_{n+2}-3\geqslant n(n+1)$

C. $f(2m)=f(m)$　　D. $f(a_{n+3}-S_{n+1})=n$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

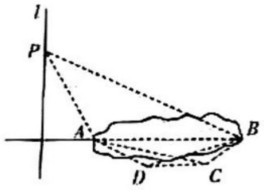
13. 已知 $3\sin\alpha=\cos\alpha$，则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$ ________.

14. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为平行四边形，E,F 分别为棱 AD,PC 上的点，$AD=3AE$，且 $PA//$ 平面 EBF，则 $\frac{PF}{FC}=$ ________.



15. 已知曲线 $y=\frac{x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-2)$ 处的切线方程为 $y=kx+b$，记 $\max\{p,q\}=\begin{cases}p,p\geq q,\\q,p<q,\end{cases}$ 设函数 $F(x)=\max\{4|x-1|,kx+b\}$，则 $F(x)$ 的最小值为________.

16. 如图，一个池塘的东、西两侧的端点分别为 B,A，现取水库周边两点 C,D，测得 $CD=80$ m，$\angle ADB=135°$，$\angle BDC=\angle DCA=15°$，$\angle ACB=120°$，池塘旁边有一条与直线 AB 垂直的小路 l，且点 A 到 l 的距离为 $20\sqrt{5}$ m. 小张（P 点）沿着小路 l 行进并观察 A,B 两点处竖立的旗帜（与小张的眼睛在同一水平面内），则小张的视线 PA 与 PB 的夹角的正切值的最大值为________.



四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=2$，记其前 n 项和为 S_n，且 a_2,a_3+3,a_4 成等差数列.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

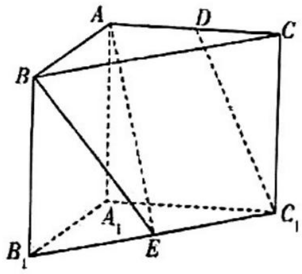
（Ⅱ）求 $\{S_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$AB=AC=AA_1$，$AB\perp AC$，D,E 分别为棱 AC,B_1C_1 的中点.

（Ⅰ）求证：$C_1D//$ 平面 ABE；

（Ⅱ）求直线 BC 与平面 ABE 所成角的正弦值.



(12分)

在钝角三角形 ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $a\cos A=b\cos B$

(Ⅰ)证明：$\triangle ABC$ 是等腰三角形；

(Ⅱ)若 $a\sin C=1$ 且 $c^2=2\sqrt{3}b$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

(12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和记为 S_n，$a_1=1$，且 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{a_n+\lambda}{a_n}$($\lambda$ 为常数).

(Ⅰ)若 a_1,a_2,a_3 构成等比数列，求 λ 的值；

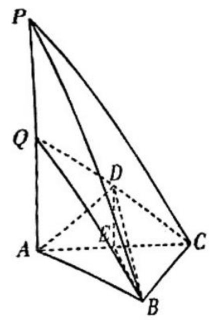
(Ⅱ)若 $\lambda=3$，且 $\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+2}}<M$ 恒成立，求实数 M 的最小值.

(12分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp AC$，Q,D,E 分别是线段 PA,QC,AC 的中点，$BD=\sqrt{2}$，$PA=2AC=4BE=4$.

(Ⅰ)求证：$DE\perp$ 平面 ABC；

(Ⅱ)若二面角 $Q-BD-A$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，求 $\angle ACB$.



(12分)

已知函数 $f(x)=me^x-x$，$m\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 m 的取值范围；

(Ⅱ)设正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=2$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{e^{x_i}}\geqslant nm-2e^{-\frac{2}{n}}$.

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. D　2. B　3. D　4. C　5. A

6. D　7. C　8. B

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. AC　10. ABD　11. ABC　12. BCD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $-\frac{1}{2}$　14. $\frac{1}{3}$

15. $\frac{16}{7}$　16. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解析　(Ⅰ)因为 a_2, a_3+3, a_4 成等差数列,所以 $2(a_3+3)=a_2+a_4$, …… (2 分)

得 $2a_3+6=\frac{a_3}{q}+a_3q$,即 $2a_3+6=\frac{a_3}{2}+2a_3$,解得 $a_3=12$, …… (4 分)

所以 $a_n=a_3q^{n-3}=12\times2^{n-3}=3\times2^{n-1}$. …… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $a_1=3\times2^{1-1}=3$, …… (6 分)

所以 $S_n=\frac{3\times(1-2^n)}{1-2}=3\times2^n-3$, …… (8 分)

则 $T_n=\frac{6\times(1-2^n)}{1-2}-3n=3\times2^{n+1}-6-3n$. …… (10 分)

18. 解析　(Ⅰ)如图,设 A_1C_1 的中点为 F,连接 AF, EF.

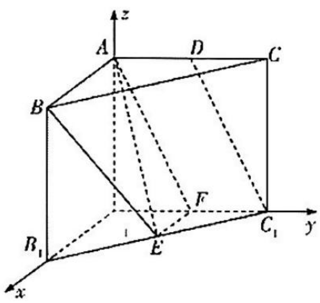
因为 E, F 分别为 B_1C_1, A_1C_1 的中点,所以 $EF/\!/A_1B_1$,

又 $AB/\!/A_1B_1$,所以 $EF/\!/AB$,所以 AF 在平面 ABE 内. …… (2 分)

因为 $AD=\frac{1}{2}AC, C_1F=\frac{1}{2}A_1C_1, AC\perp\!\!\!\!/ A_1C_1$,所以 $AD\perp\!\!\!\!/ C_1F$, …… (3 分)

所以四边形 ADC_1F 是平行四边形,$AF/\!/C_1D$, …… (4 分)

又 $C_1D\not\subset$ 平面 ABE,所以 $C_1D/\!/$平面 ABE. …… (5 分)



— 1 —

(Ⅱ)以 A_1 为坐标原点,分别以 A_1B_1,A_1C_1,A_1A 所在的直线为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,
······(6分)

设 $AB=AC=AA_1=2$,则点 $B(2,0,2)$,$C(0,2,2)$,$A(0,0,2)$,$E(1,1,0)$,

$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{AE}=(1,1,-2)$. ······(8分)

设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(x,y,z)\cdot(2,0,0)=2x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=(x,y,z)\cdot(1,1,-2)=x+y-2z=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=2z,\end{cases}$

不妨令 $z=1$,得平面 ABE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$. ······(10分)

设直线 BC 与平面 ABE 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BC}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{|(0,2,1)\cdot(-2,2,0)|}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ······(12分)

19. **解析** (Ⅰ)由条件及正弦定理可得 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$, ······(1分)

所以 $\sin 2A=\sin 2B$. ······(2分)

因为 $A,B\in(0,\pi)$,且 $A+B\in(0,\pi)$,所以 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$,

即 $A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$. ······(3分)

因为 $\triangle ABC$ 是钝角三角形,所以 $A+B\neq\dfrac{\pi}{2}$, ······(4分)

所以 $A=B$,所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形. ······(5分)

(Ⅱ)由题意及(Ⅰ)得 $A=B$,从而 $a=b$.

由正弦定理得 $c\sin A=a\sin C=1$,

所以 $c=\dfrac{1}{\sin A}$,且 $a=\dfrac{1}{\sin C}=\dfrac{1}{\sin(A+B)}=\dfrac{1}{\sin 2A}$, ······(7分)

由 $c^2=2\sqrt{3}b=2\sqrt{3}a$,可得 $\dfrac{1}{\sin^2A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 2A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A\cos A}$,

整理得 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$. ······(9分)

所以 $C=\pi-A-B=\dfrac{2\pi}{3}$, ······(10分)

由 $a\sin C=1$,得 $b=a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ······(12分)

20. **解析** (Ⅰ)令 $n=1$,得 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{a_1+\lambda}{a_1}$,即 $\dfrac{1+a_2}{1}=\dfrac{1+\lambda}{1}$,所以 $a_2=\lambda$, ······(1分)

令 $n=2$,得 $\dfrac{S_3}{S_2}=\dfrac{a_2+\lambda}{a_2}$,即 $\dfrac{1+\lambda+a_3}{1+\lambda}=\dfrac{\lambda+\lambda}{\lambda}=2$,所以 $a_3=1+\lambda$. ······(2分)

因为 a_1,a_2,a_3 构成等比数列,所以 $a_1a_3=a_2^2$, ······(3分)

即 $1+\lambda=\lambda^2$，解得 $\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\lambda=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0,舍去\right)$. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）由已知得 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{a_n+3}{a_n}$，所以 $a_n(S_{n+1}-S_n)=3S_n$，即 $a_na_{n+1}=3S_n$①， ………………（6 分）

所以 $a_{n+1}a_{n+2}=3S_{n+1}$②，由②－①得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=3a_{n+1}$， ………………………………（7 分）

又 $a_{n+1}>0$，所以 $a_{n+2}-a_n=3$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项分别构成公差为 3 的等差数列.

由（Ⅰ）可知 $a_2=\lambda=3$， ………………………………………………………………（8 分）

设 $\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+2}}=T_n$，

因为 $\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$，

所以 $T_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}\right)$， …………（10 分）

当 $n\to+\infty$ 时，$a_n\to+\infty$，$\frac{1}{a_n}\to0$，所以 $T_n<\frac{4}{9}$ 且 $T_n\to\frac{4}{9}$，

故 M 的最小值为 $\frac{4}{9}$. ………………………………………………………………（12 分）

21. **解析**　（Ⅰ）因为 D,E 分别是线段 QC,AC 的中点，

所以 $DE/\!/PA$，且 $DE=\frac{1}{2}QA=\frac{1}{4}PA=1$.

因为 $PA\perp AC$，所以 $DE\perp AC$. ………………………………………………………（1 分）

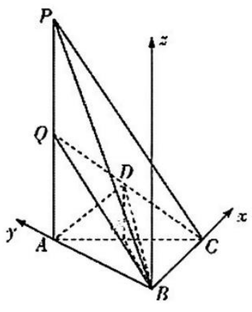
因为 $BD=\sqrt{2}$，$BE=1$，所以 $DE^2+BE^2=BD^2$，所以 $DE\perp BE$. ………………………………（2 分）

又因为 $AC,BE\subset$ 平面 ABC，且 $AC\cap BE=E$， ………………………………………（3 分）

所以 $DE\perp$ 平面 ABC. ………………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）因为 E 是线段 AC 的中点，且有 $AC=2BE=2$，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形，其中 $AB\perp BC$.

由（Ⅰ）可知 $DE\perp$ 平面 ABC，所以可以 B 为坐标原点，BC,BA 所在直线为 x,y 轴，过点 B 且与 ED 平行的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系. ……………………………………………（5 分）



— 3 —

因为 $AB\perp BC$，$AC=2$，设 $\angle ACB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $AB=AC\sin\theta=2\sin\theta$，$BC=AC\cos\theta=2\cos\theta$. ………………（6 分）

则 $B(0,0,0)$，$A(0,2\sin\theta,0)$，$C(2\cos\theta,0,0)$，$Q(0,2\sin\theta,2)$，$D(\cos\theta,\sin\theta,1)$，

所以 $\overrightarrow{DB}=(-\cos\theta,-\sin\theta,-1)$，$\overrightarrow{DQ}=(-\cos\theta,\sin\theta,1)$，$\overrightarrow{DA}=(-\cos\theta,\sin\theta,-1)$. ………………（7 分）

不妨设平面 QBD 与平面 ABD 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DA}=0,\end{cases}$

即有 $\begin{cases}-x_1\cos\theta-y_1\sin\theta-z_1=0,\\ -x_1\cos\theta+y_1\sin\theta+z_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}-x_2\cos\theta-y_2\sin\theta-z_2=0,\\ -x_2\cos\theta+y_2\sin\theta-z_2=0.\end{cases}$

分别令 $z_1=\sin\theta$，$z_2=\cos\theta$，此时有 $\boldsymbol{n}_1=(0,-1,\sin\theta)$，$\boldsymbol{n}_2=(-1,0,\cos\theta)$. ………………（10 分）

则 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}\cdot\sqrt{1+\cos^2\theta}}=\frac{1}{3}$，………………（11 分）

整理得 $\sin^2 2\theta=1$.

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin2\theta=1$，$2\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$，

所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{4}$. ………………（12 分）

22. 解析　（Ⅰ）$f(x)\geqslant0$ 恒成立，等价于 $m\geqslant\frac{x}{e^x}$ 恒成立，即 $m\geqslant\left(\frac{x}{e^x}\right)_{\max}$. ………………（1 分）

设 $\varphi(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $\varphi'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，………………（2 分）

当 $x<1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=\frac{1}{e}$，………………（3 分）

故 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. ………………（4 分）

（Ⅱ）$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{e^{x_i}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(m-\frac{x_i}{e^{x_i}}\right)=nm-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{e^{x_i}}$，故待证不等式等价于 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{e^{x_i}}\leqslant2e^{-\frac{2}{n}}$. ………………（5 分）

在曲线 $y=\varphi(x)$ 上任取一点 $(a,\varphi(a))(0<a<2)$，由（Ⅰ）知 $\varphi'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，且 $\varphi(a)=\frac{a}{e^a}$，

故曲线 $y=\varphi(x)$ 在点 $(a,\varphi(a))$ 处的切线方程为 $y=\frac{1-a}{e^a}x+\frac{a^2}{e^a}$.

下面先证明：当 $0<x<2$ 且 $0<a<2$ 时，$\frac{x}{e^x}\leqslant\frac{1-a}{e^a}x+\frac{a^2}{e^a}$.（*）

设 $g(x)=\frac{1-a}{e^a}x+\frac{a^2}{e^a}-\frac{x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{1-a}{e^a}-\frac{1-x}{e^x}$，………………（7 分）

设 $h(x)=g'(x)$，当 $0<x<2$ 时，$h'(x)=\frac{2-x}{e^x}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，

— 4 —

又 $h(a)=0$，所以当 $0<x<a$ 时，$h(x)<0$，当 $a<x<2$ 时，$h(x)>0$，

即 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,2)$ 上单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(a)=0$，

即(*)成立. ……………………………………………………………………………………… (9 分)

因为正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=2$，所以 $0<x_i<2$，

所以当 $0<a<2$ 时，$\dfrac{x_i}{e^{x_i}}\leqslant\dfrac{1-a}{e^a}x_i+\dfrac{a^2}{e^a}$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{e^{x_i}}\leqslant\dfrac{1-a}{e^a}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\dfrac{na^2}{e^a}=\dfrac{2(1-a)}{e^a}+\dfrac{na^2}{e^a}$，……………………………… (11 分)

取 $a=\dfrac{2}{n}$，得 $\dfrac{2(1-a)}{e^a}+\dfrac{na^2}{e^a}=2e^{-\frac{2}{n}}$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{e^{x_i}}\leqslant 2e^{-\frac{2}{n}}$，即原命题得证. ……………………………………………………… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。