高三数学参考答案

1. A　由题意可得 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$，$B=\{x|x<0\}$，则 $\complement_R A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，故 $(\complement_R A)\cap B=\{x|-1\leqslant x<0\}$.

2. B　由题意可得 $z=(2-i)(1+3i)=2+6i-i-3i^2=5+5i$，则 $|z|=5\sqrt{2}$.

3. C　由题意可得该班所有学生在这次体检中测得的身高的平均值是 $168\times\frac{3}{5}+162\times\frac{2}{5}=165.6$ cm.

4. D　因为 $1<\log_3 5<\log_3 9=2$，$0<0.9^{1.1}<0.9^0=1$，$\log_{0.6}0.3>\log_{0.6}0.36=2$，所以 $c>a>b$.

5. C　由题意可得圆 C 的圆心为 $C(1,2)$，半径 $r=3$，则点 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|m+11|}{5}$. 因为直线 l 与圆 C 有公共点，所以 $\frac{|m+11|}{5}\leqslant 3$，解得 $-26\leqslant m\leqslant 4$.

6. B　因为 α 为第二象限角，且 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

则 $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\cos[2(\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{2}]=\sin[2(\alpha+\frac{\pi}{6})]=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-\frac{\sqrt{6}}{3})=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. D　设 $PA=AB=2a$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积 $S=\frac{1}{2}\times 2a\times\sqrt{4a^2-a^2}\times 4+4a^2=(4\sqrt{3}+4)a^2$，体积 $V=\frac{1}{3}\times 4a^2\times\sqrt{4a^2-2a^2}=\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

因为 $\frac{1}{3}S\cdot r_{内切球}=\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$，所以 $\frac{(4\sqrt{3}+4)a^2}{3}\times(\sqrt{3}-1)=\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$，

解得 $a=\sqrt{2}$，则 $V=\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}=\frac{16}{3}$.

8. A　由题意可得 $f'(x)=2x-\frac{4}{x^2}(x>0)$. 令 $f'(x)=2x-\frac{4}{x^2}=3$，解得 $x=2$.

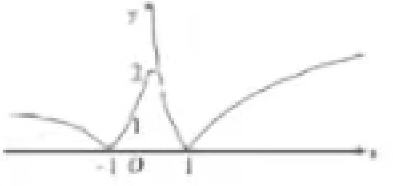
因为 $f(2)=1$，所以点 $(2,1)$ 到直线 $l:3x-y-15=0$ 的距离 $d=\frac{|6-1-15|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$，则 A,B 之间的最短距离是 $\sqrt{10}$.

9. ABD　设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $a_n=a_1q^{n-1}$，$a_{n+1}=a_1q^n$，所以 $a_n-a_{n+1}=a_1q^{n-1}(1-q)$，则 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 是首项为 $a_1(1-q)$，公比为 q 的等比数列，故 A 正确. 因为 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{q}$，所以 $\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\}$ 是首项为 $\frac{1}{q}$，公比为 1 的等比数列，则 B 正确. 因为 $a_n+2=a_1q^{n-1}+2$，所以 $\frac{a_{n+1}+2}{a_n+2}=\frac{a_1q^n+2}{a_1q^{n-1}+2}$，所以 $\{a_n+2\}$ 不是等比数列，则 C 错误. 因为 $\frac{2^n a_n}{2^{n-1}a_{n-1}}=2q$，所以 $\{2^n a_n\}$ 是首项为 $2a_1$，公比为 $2q$ 的等比数列，则 D 正确.

10. ABD　令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. 当 $k=1$ 时，$x=\frac{5\pi}{6}$，则 A 正确. 令 $2k_1\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k_1\pi+\frac{\pi}{2}(k_1\in\mathbf{Z})$，得 $k_1\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k_1\pi+\frac{\pi}{3}(k_1\in\mathbf{Z})$. 当 $k_1=-1$ 时，$-\frac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant-\frac{2\pi}{3}$. 因为 $[-\pi,-\frac{3\pi}{4}]\subsetneqq[-\frac{7\pi}{6},-\frac{2\pi}{3}]$，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,-\frac{3\pi}{4}]$ 上单调递增，则 B 正确. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象，则 C 错误. 由 $x\in[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}]$，得 $2x-\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}]$，则 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，即 $f(x)\in[-\sqrt{3},2]$. 故 D 正确.

11. ACD　由题意可得直线 l 的斜率不为 0，则可设直线 $l:x=my+\frac{p}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 联立 $\begin{cases}y^2=2px,\\ x=my+\frac{p}{2},\end{cases}$ 整理得 $y^2-2pmy-p^2=0$，则 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$. 因为 $|AF|=2|BF|$，所以 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，所以 $y_1=-2y_2$，所以 $-2y_2+y_2=2pm$，所以 $y_2=-2pm$，则 $y_1y_2=-2y_2^2=-p^2$，即 $-2\times(-2pm)^2=-p^2$，解得 $m^2=\frac{1}{8}$. 因为 $|AF|=2|BF|=6$，所以 $|AB|=\sqrt{m^2+1}\cdot|y_1-y_2|=2p(m^2+1)=\frac{9}{4}p=9$，解得 $p=4$，则 A 正确. 因为 $m^2=\frac{1}{8}$，所以 $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$，则直线 l 的斜率是 $\pm2\sqrt{2}$. 因为点 A 在第一象限，所以直线 l 的斜率大于 0，所以直线 l 的斜率是 $2\sqrt{2}$，则 B 错误. 设线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5}{2}$，即线段 AB 的中点到 y 轴的距离是 $\frac{5}{2}$，则 C 正确. 因为 $p=4$，$m^2=\frac{1}{8}$，所以 $|OF|=2$，$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2p\cdot\sqrt{m^2+1}=6\sqrt{2}$，则 $\triangle OAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=6\sqrt{2}$. 故 D 正确.

12. BD　作出 $f(x)$ 的大致图象，如图. 由图可知 $m\in(0,1)$，则 A 错误. 因为 x_1,x_2 是 $|3^{x+1}-1|=m$ 的两根，所以 $1-3^{x_1+1}=3^{x_2+1}-1$，所以 $3^{x_1+1}+3^{x_2+1}=2$，即 $3(3^{x_1}+3^{x_2})=2$，则 $3^{x_1}+3^{x_2}=\frac{2}{3}$，故 B 正确. 因为 x_3,x_4 是 $|\log_2x|=m$ 的两根，所以 $-\log_2x_3=\log_2x_4$，所以 $\log_2x_3+\log_2x_4=0$，即 $\log_2(x_3x_4)=0$，所以 $x_3x_4=1$，则 $x_3+4x_4=x_3+\frac{4}{x_3}$. 因为 $\frac{1}{2}<x_3<1$，所以 $x_3+\frac{4}{x_3}>5$，即 $x_3+4x_4>5$，则 C 错误. 因为 $x_3x_4=1$，所以 $2x_3+x_4=2x_3+\frac{1}{x_3}\geqslant2\sqrt{2}$，当且仅当 $2x_3=\frac{1}{x_3}$，即 $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立. 因为 $3^{x_1}+3^{x_2}=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{3^{x_1}+3^{x_2}}{2x_3+x_4}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{6}$，则 D 正确.



13. -3　因为 $\boldsymbol{a}=(-1,m)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，所以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,m+2)$. 因为 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$

$-1+m-2=0$，解得 $m=-3$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{9}$　以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系（图略）. 设 $AB=2$，则 $B(2,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，$E(1,0,0)$，从而 $\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{C_1E}=(1,-2,-2)$. 设异面直线 BD_1 与 C_1E 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{C_1E}\rangle|=\frac{|-2+4-4|}{\sqrt{4+4+4}\times\sqrt{1+4+4}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

15. 3240　先将 6 名男同学分配到 A，B，C 三个公司实习，不同的分配方案有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ 种，再将 4 名女同学分配到 A，B，C 三个公司实习，不同的分配方案有 $C_4^2A_3^3=36$ 种，则将 6 名男同学和 4 名女同学分配到 A，B，C 三个公司实习，不同的分配方案有 $90\times36=3240$ 种.

16. $\frac{1}{9}$　设$\triangle AF_1F_2$ 和$\triangle BF_1F_2$ 内切圆的半径分别为 r_1，r_2，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 由椭圆的定义可知 $|AF_1|+|AF_2|=|BF_1|+|BF_2|=2a$，则 $\frac{S_{\triangle AF_1F_2}}{S_{\triangle BF_1F_2}}=\frac{\frac{1}{2}(2a+2c)\cdot r_1}{\frac{1}{2}(2a+2c)\cdot r_2}=\frac{\frac{1}{2}\times2c\times y_1}{\frac{1}{2}\times2c\times(-y_2)}$，则 $\frac{r_1}{r_2}=-\frac{y_1}{y_2}$. 由题意可知直线 l：$x=3y-c$，代入椭圆 C 的方程，得 $\frac{(3y+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，整理得 $(a^2+9b^2)y^2+6b^2cy-b^4=0$，则 $y_1+y_2=-\frac{6b^2c}{a^2+9b^2}$，$y_1y_2=-\frac{b^4}{a^2+9b^2}$，则 $\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}=\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1y_2}=\frac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}-2=-\frac{36c^2}{a^2+9b^2}-2=-\frac{36c^2}{10-9c^2}-2=-\frac{10}{10-\frac{5}{2}}-2=-\frac{10}{3}$. 设 $\frac{y_1}{y_2}=t$，则 $t+\frac{1}{t}=-\frac{10}{3}$，解得 $t=-3$（舍去）或 $t=-\frac{1}{3}$，则 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}$，故$\triangle AF_1F_2$ 内切圆的面积与$\triangle BF_1F_2$ 内切圆的面积的比值是 $\frac{1}{9}$.

17. 解：(1)当 $n\geq2$ 时，$(n-1)a_{n-1}=S_{n-1}+(n-1)^2-(n-1)=S_{n-1}+n^2-3n+2$，　……… 1分

则 $na_n-(n-1)a_{n-1}=S_n+n^2-n-(S_{n-1}+n^2-3n+2)=a_n+2(n-1)$，

即 $(n-1)a_n-(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$，故 $a_n-a_{n-1}=2(n\geq2)$.　……………………………… 3分

因为 $a_1=1$，所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列.　……………………………… 4分

则 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.　……………………………………………………………… 5分

(2)由(1)可得 $a_{n+1}=2n+1$，则 $b_n=(-1)^na_na_{n+1}=(-1)^n(2n-1)(2n+1)$.　…………… 6分

则 $b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{19}+b_{20}=-1\times3+3\times5-5\times7+7\times9-\cdots-37\times39+39\times41$ ……………………………………………………………………………………… 8分

$=4\times(3+7+\cdots+39)=4\times\frac{(3+39)\times10}{2}=840$.　………………………………… 10分

18. 解：(1)(解法一)甲参加这个选拔项目没有进入第二轮的情况有以下两种：

第一种情况是甲第一轮的两个问题都没有回答正确，其概率 $P_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$；　……… 1分

第二种情况是甲第一轮的两个问题恰好回答正确1个，其概率 $P_2=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$. ………………………………………………………… 2分

故甲参加这个选拔项目没有进入第二轮的概率 $P=P_1+P_2=\frac{5}{9}$. ………………………… 4分

（解法二）由题意可知甲能进入第二轮的概率 $P_3=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. ………………………… 2分

则甲参加这个选拔项目没有进入第二轮的概率 $P=1-P_3=\frac{5}{9}$. ………………………… 4分

(2)由题意可知 X 的所有可能取值是0,1,2,3,4. ………………………… 5分

$P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. ………………………… 6分

$P(X=1)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$. ………………………… 7分

$P(X=2)=(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{9}$. ………………………… 8分

$P(X=3)=(\frac{2}{3})^2\times C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$. ………………………… 9分

$P(X=4)=(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{9}$. ………………………… 10分

X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

故 $E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}=\frac{16}{9}$. ………………………… 12分

19.(1)证明：由题意可知 $ABE-DCF$ 是三棱台，且 $\triangle ABE$，$\triangle CDF$ 均是等边三角形，$EF\perp CF$，$EF\perp DF$. ………………………… 1分

因为 $CF,DF\subset$ 平面 CDF，且 $CF\cap DF=F$，所以 $EF\perp$ 平面 CDF. ………………………… 2分

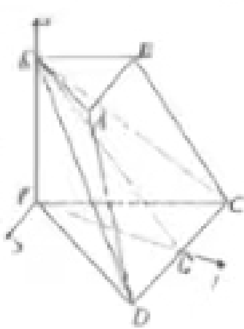
因为 $CD\subset$ 平面 CDF，所以 $EF\perp CD$. ………………………… 3分

因为 G 是 CD 的中点，且 $DF=CF$，所以 $CD\perp FG$. ………………………… 4分

因为 $EF,FG\subset$ 平面 EFG，且 $EF\cap FG=F$，所以 $CD\perp$ 平面 EFG. ………………………… 5分

因为 $AB/\!/CD$，所以 $AB\perp$ 平面 EFG. ………………………… 6分

(2)解：以 F 为坐标原点，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{FG}$，$\overrightarrow{FE}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AE=2$，则 $B(-1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$，$C(-2,2\sqrt{3},0)$，$D(2,2\sqrt{3},0)$，$E(0,0,2\sqrt{3})$，从而 $\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(4,0,0)$，$\overrightarrow{DE}=(-2,-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$. ………………………… 8分

设平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$.

则$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{CD}=4x_1=0, \\ n\cdot\overrightarrow{BC}=-x_1+\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=2$，得 $n=(0,2,1)$. ………………………… 9分

设平面 CDE 的法向量为 $m=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{CD}=4x_2=0, \\ m\cdot\overrightarrow{DE}=-2x_2-2\sqrt{3}y_2+2\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=1$，得 $m=(0,1,1)$. ………………………… 10分

设平面 BCD 与平面 CDE 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle n,m\rangle|=\dfrac{2+1}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. …… 12分

20. 解：(1)因为 $2a\sin C+c\cos B=\sqrt{3}b\sin C$，所以 $2\sin A\sin C+\sin C\cos B=\sqrt{3}\sin B\sin C$. ……………………………………………………………………………………………… 1分

因为 $\sin C\neq0$，所以 $2\sin A=\sqrt{3}\sin B-\cos B$，所以 $\sin A=\sin(B-\frac{\pi}{6})$. ………………… 2分

因为 $\sin A=\frac{1}{2}$，所以 $\sin(B-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$. ……………………………………………… 3分

因为 $0<B<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，则 $B=\frac{\pi}{3}$，故 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …… 5分

(2)由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R=8$，则 $a=8\sin A$，$b=8\sin B$.

故 $\sqrt{3}b-a=8\sqrt{3}\sin B-8\sin A$. ……………………………………………………… 7分

由(1)可得 $\sin A=\sin(B-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B-\frac{1}{2}\cos B$. …………………………………… 8分

故 $\sqrt{3}b-a=8\sqrt{3}\sin B-8\sin A=4\sqrt{3}\sin B+4\cos B=8\sin(B+\frac{\pi}{6})$. ………………… 10分

当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，$8\sin(B+\frac{\pi}{6})$ 取得最大值 8，即 $\sqrt{3}b-a$ 的最大值为 8. ………………… 12分

21. 解：(1)由题意可得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}, \\ \frac{4^2}{a^2}-\frac{(\sqrt{6})^2}{b^2}=1, \\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=\sqrt{2}$. ………………………… 3分

故双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………… 4分

(2)由(1)可知双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，则可设 $A(x_1,\frac{\sqrt{2}}{2}x_1)$，$B(x_2,-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$.
……………………………………………………………………………………………… 5分

设 $D(x_0,y_0)$. 因为 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{DB}$，所以$\begin{cases}x_0-x_1=k(x_2-x_0), \\ y_0-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1=k(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2-y_0),\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_0=\dfrac{x_1+kx_2}{1+k}, \\ y_0=\dfrac{\sqrt{2}(x_1-kx_2)}{2(1+k)}.\end{cases}$
……………………………………………………………………………………………… 7分

因为点 D 在双曲线 C 上，所以 $\dfrac{\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}\right)^2}{4}-\dfrac{\left[\frac{\sqrt{2}(x_1-kx_2)}{2(1+k)}\right]^2}{2}=1$，整理得 $x_1x_2=\dfrac{(k+1)^2}{k}$.

……… 9 分

作 $AF\perp y$ 轴，垂足为 F，作 $BE\perp y$ 轴，垂足为 E（图略）.

$\triangle OAB$ 的面积 $S=S_{梯形AFEB}-S_{\triangle OAF}-S_{\triangle OBE}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+x_2)^2}{2}-\dfrac{1}{2}x_1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1-\dfrac{1}{2}x_2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{(k+1)^2}{k}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$，解得 $k=\dfrac{1}{3}$ 或 $k=3$. …………………………………… 11 分

故存在 $k=\dfrac{1}{3}$ 或 $k=3$，使得 $\triangle OAB$ 的面积为 $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$. …………………………………… 12 分

22.（1）解：由题意可得 $g(x)=f'(x)=e^x-2ax$，则 $g'(x)=e^x-2a$. …………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. …………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，由 $g'(x)>0$，得 $x>\ln(2a)$，由 $g'(x)<0$，得 $x<\ln(2a)$，

则 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增. …………………… 3 分

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增. …………………………………………………………… 4 分

（2）证明：要证明 $f(x)>ex\ln x$，即证 $e^x-ax^2>ex\ln x$，即证 $\dfrac{e^x}{x^2}-a>\dfrac{e\ln x}{x}$. ………… 5 分

设 $h(x)=\dfrac{e^x}{x^2}(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$.

由 $h'(x)>0$，得 $x>2$，由 $h'(x)<0$，得 $0<x<2$，

则 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

故 $h(x)\geqslant h(2)=\dfrac{e^2}{4}$. …………………………………………………………………… 7 分

设 $\varphi(x)=\dfrac{e\ln x}{x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{e(1-\ln x)}{x^2}$.

由 $\varphi'(x)>0$，得 $0<x<e$，由 $\varphi'(x)<0$，得 $x>e$，

则 $\varphi(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

故 $\varphi(x)\leqslant\varphi(e)=1$. ………………………………………………………………………… 9 分

因为 $a\leqslant\dfrac{e^2-4}{4}$，所以 $-a\geqslant\dfrac{4-e^2}{4}$，所以 $\dfrac{e^x}{x^2}-a\geqslant 1$. …………………………………… 10 分

因为 $\dfrac{e^x}{x^2}-a\geqslant 1$，$\dfrac{e\ln x}{x}\leqslant 1$，且取等号的条件不同，所以 $\dfrac{e^x}{x^2}-a>\dfrac{e\ln x}{x}$，即 $f(x)>ex\ln x$. ……

……… 12 分