成都七中2023-2024学年度2024届高三（上）一诊模拟试卷
数学(文)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟.

第 I 卷

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\left\{x\in Z\left|x^2-2x-3<0\right.\right\}$，则集合 A 的子集个数为（　）

A. 3　　B. 4　　C. 8　　D. 16

2. 已知a为实数，若复数$(a+i)(1-2i)$为纯虚数，则$a=$（　）

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

3. 一组数据共含大小不一的 7 个数值，其平均数和方差分别为$\overline{x_1}$和s_1^2，若去掉一个最大值和一个最小值，则剩下的数据其平均数和方差分别为$\overline{x_2}$和s_2^2，则一定有（　）

A. $\overline{x_1}<\overline{x_2}$　　B. $\overline{x_1}>\overline{x_2}$　　C. $s_1^2<s_2^2$　　D. $s_1^2>s_2^2$

4. 与 $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ 有相同定义域的函数是（　）

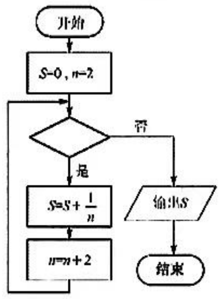
A. $y=x^{\frac{2}{3}}$　　B. $y=(\sqrt{x})^2$　　C. $y=\lg(10^x)$　　D. $y=e^{\ln x}$

5. 若向量$\vec{a},\vec{b}$满足：$|\vec{a}|=1,(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a},|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$，则$|\vec{b}|=$（　）

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 10　　D. $\sqrt{10}$

6. 阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序．若输出的 S 为$\frac{11}{12}$，则判断框中填写的内容可以是(　)

A. $n\le 4$?　　B. $n\le 5$?　　C. $n\le 6$?　　D. $n\le 8$?



7. 已知$a,b,c\in\mathbf{R}$，则“$a\le b$”的必要不充分条件可以是（　）

A. $\frac{1}{a}\le\frac{1}{b}$　　B. $ac\le bc$　　C. $ac^2\le bc^2$　　D. $a^2\le b^2$

8. 抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的顶点为O，斜率为 1 的直线l过点$(2p,0)$，且与抛物线C交于A,B两点，若ΔOAB的面积为$8\sqrt{5}$，则该抛物线的准线方程为（　　）

A. $x=-1$　　B. $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $x=-2$　　D. $x=-\sqrt{2}$

9. 设m,n是两条不相同的直线，α,β是两个不重合的平面，则下列命题错误的是（　　）

A. 若$m\perp\alpha,n//\beta,\alpha//\beta$，则$m\perp n$

B. 若$n//\alpha,n\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$

C. 若m、n是异面直线，$m\subset\alpha,m//\beta,n\subset\beta,n//\alpha$，则$\alpha//\beta$.

D. 若$m\perp n,m\perp\beta$，则$n//\beta$

10. 已知$\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$，$\tan\alpha-\tan\beta=3\sqrt{3}$，则$\cos(\alpha+\beta)$的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{6}$

11. 与曲线在某点处的切线垂直，且过该点的直线称为曲线在某点处的法线，若曲线$y=x^4$的法线的纵截距存在，则其最小值为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. 1　　C. $\frac{17}{16}$　　D. $\frac{5}{4}$

12. 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$的左焦点为$F$，过$F$的直线与圆$x^2+y^2=a^2$相切于点$Q$，与双曲线的右支交于点$P$，若$|PQ|=2|QF|$，则双曲线$C$的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{13}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{4}{3}$

第 II 卷

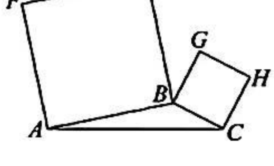
二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 函数$f(x)=(2x+1)(x-a)$是偶函数，则$a=$__________.

14. 若x，y满足约束条件$\begin{cases}x-3y+2\le 0,\\ x-y\le 0,\\ y\ge 0,\end{cases}$ 则$z=x-2y$的最大值为__________.

15. 半球的表面积与其内最大正方体的表面积之比为__________.

16. 如图，在$\triangle ABC$所在平面内，分别以AB，BC为边向外作正方形$ABEF$和正方形$BCHG$. 记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a,b,c，面积为S. 已知$S=\frac{3}{4}$，且$a\sin A+c\sin C=4a\sin C\sin B$，则$FH=$__________.



三、解答题(共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.(12 分)某企业生产的产品按质量分为一等品和二等品，该企业计划对现有生产设备进行改造，为了分析设备改造前后的效果，现从设备改造前后生产的大量产品中各抽取 200 件产品作为样本，产品的质量情况统计如表：

	一等品	二等品	合计
设备改造前	120	80	200
设备改造后	150	50	200
合计	270	130	400

(1)判断是否有 99%的把握，认为该企业生产的这种产品的质量与设备改造有关；

(2)按照分层抽样的方法，从设备改造前的产品中取得了 5 件产品，其中有 3 件一等品和 2 件二等品.现从这 5 件产品中任选 2 件，求选出的这 2 件全是一等品的概率.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

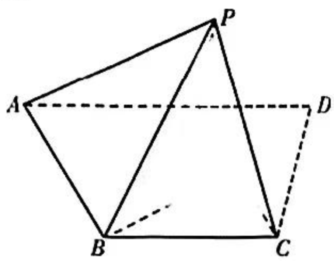
$P(K^2\geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

18.(12 分)在等比数列$\{a_n\}$和等差数列$\{b_n\}$中，$a_1=2b_1=2$，$a_2=2b_2$，$a_3=2b_3+2$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)令$c_n=\dfrac{b_n^2}{a_n}$，记数列$\{c_n\}$的前n项积为T_n，其中$T_1=c_1$，证明：$T_n\leq\dfrac{9}{16}$.

19.(12 分)如图，平面四边形$ABCD$中，$BC//AD,\angle ADC=90^\circ,\angle ABC=120^\circ$，$E$是$AD$上的一点，$AB=BC=2DE=4a(a>0)$，$F$是$EC$的中点，以$EC$为折痕把$\triangle EDC$折起，使点$D$到达点$P$的位置，且$PC\perp BF$.



(1)证明：平面$PEC\perp$平面$ABCE$；

(2)求点C到平面PAB的距离.

20. (12 分) 设函数 $F(x)=(1-\lambda)\cos x+\lambda\cos a-\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$，其中 $a\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

(1) 若 $\lambda=1$，讨论 $F(x)$ 在 $(a,\dfrac{\pi}{2})$ 上的单调性；

(2) 若 $\lambda\le\dfrac{1}{2}$，证明：当 $x\in(a,\dfrac{\pi}{2})$ 时，不等式 $(x-a)F(x)<0$ 恒成立.

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，动点 $D(x,y)$ 与定点 $F\left(\sqrt{3},0\right)$ 的距离和 D 到定直线 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 的距离的比是常数 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，设动点 D 的轨迹为曲线 C.

(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 已知定点 $P(t,0)$，$-2<t<0$，过点 P 作垂直于 x 轴的直线 l，过点 P 作斜率大于 0 的直线 l' 与曲线 C 交于点 G，H，其中点 G 在 x 轴上方，点 H 在 x 轴下方．曲线 C 与 x 轴负半轴交于点 A，直线 AG，AH 与直线 l 分别交于点 M，N，若 A，O，M，N 四点共圆，求 t 的值.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22. (10 分) 选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），α 为 l 的倾斜角，且 $\alpha\in(0,\pi)$，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{2}{1+\cos^2\theta}$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程；

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 A、B 两点，点 $P(0,1)$ 恰为线段 AB 的三等分点，求 $\sin\alpha$．

23. (10 分) 选修 4—5：不等式选讲

已知 $f(x)=|2x+m|(m\in R)$.

(1) 当 $m=0$ 时，求不等式 $f(x)+|x-2|<5$ 的解集；

(2) 对于任意实数 x，不等式 $|2x-2|-f(x)<m^2$ 成立，求 m 的取值范围.