

## 数学试题

## 考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:人教 A 版必修第一册,必修第二册,选择性必修第一册第一章、选择性必修第二册。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集  $U=\mathbf{R}$ , 集合  $A=\{-1,0,1,2\}$ ,  $B=\{x|y=\lg(x-1)\}$ , 则  $A\cap(\complement_U B)=$   
 A.  $\{-1\}$                       B.  $\{-1,0\}$                       C.  $\{-1,0,1\}$                       D.  $\{-1,0,1,2\}$
2. 已知复数  $z$  满足  $(4i-3)z=|\sqrt{3}-i|+i$ , 则  $\bar{z}$  在复平面内对应的点位于  
 A. 第一象限                      B. 第二象限  
 C. 第三象限                      D. 第四象限
3. 已知圆台的上、下底面的半径分别为 1, 3, 其表面积为  $26\pi$ , 则该圆台的体积为  
 A.  $\frac{76\pi}{3}$                       B.  $\frac{38\sqrt{3}\pi}{3}$                       C.  $\frac{52\pi}{3}$                       D.  $\frac{26\sqrt{3}\pi}{3}$
4. 已知  $a, b$  是两个单位向量, 若  $2a-b$  在  $b$  上的投影向量为  $-\frac{2}{3}b$ , 则  $\cos\langle a, b \rangle =$   
 A.  $\frac{1}{6}$                       B.  $-\frac{1}{6}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $-\frac{1}{3}$
5. 已知直线  $m, n$  是两条不重合的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不重合的平面, 则下列命题为真命题的是  
 A. 若  $\alpha//\beta, m//\beta$ , 则  $m//\alpha$   
 B. 若  $m\subset\alpha, n\subset\beta, \alpha\perp\beta$ , 则  $m\perp n$   
 C. 若  $m\perp n, m\perp\alpha, n//\beta$ , 则  $\alpha//\beta$   
 D. 若  $\alpha\perp\beta, m\perp\alpha, n\perp\beta$ , 则  $m\perp n$
6. 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1=10, a_2=8$ , 且  $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n (n\geq 2, n\in\mathbf{N}^*)$ , 则数列  $\{|a_n|\}$  的前 15 项和为  
 A. 84                      B. 102                      C. 120                      D. 138

17 世纪,在研究天文学的过程中,为了简化大数运算,苏格兰数学家纳皮尔发明了对数,对数的思想方法即把乘方和乘法运算分别转化为乘法和加法运算,数学家拉普拉斯称赞“对数的发明在实效上等于把天文学家的寿命延长了许多倍”.已知  $\lg 2 \approx 0.301 0$ ,  $\lg 3 \approx 0.477 1$ , 设  $N = 4^8 \times 15^{10}$ , 则  $N$  所在的区间为

- A.  $(10^{13}, 10^{14})$                       B.  $(10^{14}, 10^{15})$   
 C.  $(10^{15}, 10^{16})$                       D.  $(10^{16}, 10^{17})$

8. 在  $\triangle ABC$  中,内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a \cos C = (4 \sin A - \cos A)c$ , 则  $\frac{c}{a} + \frac{a}{c}$  的最大值为

- A.  $2\sqrt{6}$                       B.  $4\sqrt{6}$                       C.  $2\sqrt{5}$                       D.  $4\sqrt{5}$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知事件  $A, B$  满足  $P(A) = 0.6, P(B) = 0.3$ , 则下列说法正确的是

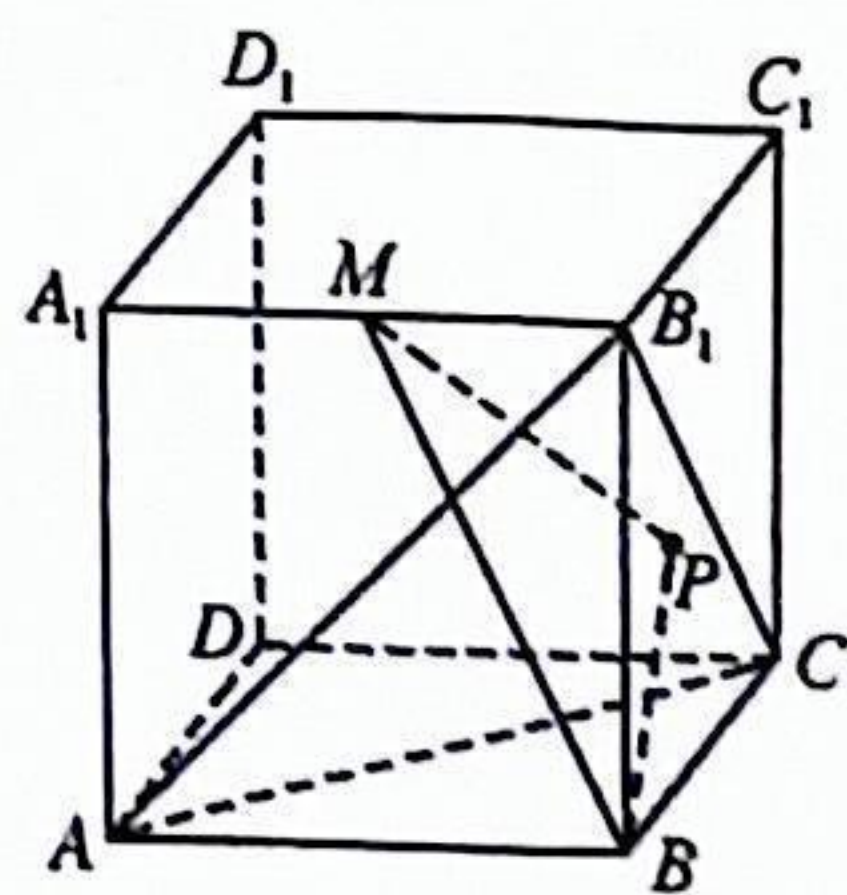
- A. 若  $B \subseteq A$ , 则  $P(A \cup B) = 0.9$   
 B. 若  $A$  与  $B$  互斥, 则  $P(A \cup B) = 0.9$   
 C. 若  $P(AB) = 0.18$ , 则  $A$  与  $B$  相互独立  
 D. 若  $A$  与  $B$  相互独立, 则  $P(A \cup B) = 0.9$

10. 已知  $a > 0, b > 0, a + 3b = 1$ , 则下列说法正确的是

- A.  $b(a+1)$  的最大值为  $\frac{1}{3}$   
 B.  $a^2 + b^2$  的最小值为  $\frac{1}{10}$   
 C.  $\frac{1}{a} + \frac{3}{b}$  的最小值为 20  
 D.  $2^a + 8^b$  的最小值为  $2\sqrt{2}$

11. 如图,在棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $M$  是  $A_1B_1$  的中点, 点  $P$  是侧面  $CDD_1C_1$  上的一点, 则下列说法正确的是

- A. 若点  $P$  是线段  $CC_1$  的中点, 则  $\vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AA_1}$   
 B.  $\triangle MPB$  的周长的最小值为  $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{21}}{2}$   
 C. 若  $\vec{PC_1} = 2\vec{DP}$ , 则点  $C$  到平面  $MPB$  的距离为  $\frac{\sqrt{6}}{4}$



D. 若  $MP \parallel$  平面  $AB_1C$ , 则线段  $MP$  长度的取值范围是  $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}]$

12. 已知函数  $f(x) = e^x, g(x) = \ln x$ , 其中  $e$  为自然对数的底数, 则下列说法正确的是

- A. 函数  $y = f(x) - eg(x)$  的极值点为 1  
 B.  $\exists x \in (0, +\infty), f(x) - g(x) \leq 2$   
 C. 若  $P, Q$  分别是曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  上的动点, 则  $|PQ|$  的最小值为  $\sqrt{2}$   
 D. 若  $f(ax) - g(x) \geq (1-a)x$  对任意的  $x \in (0, +\infty)$  恒成立, 则  $a$  的最小值为  $\frac{1}{e}$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 一组数据 24, 78, 47, 39, 60, 18, 28, 15, 53, 23, 42, 36 的第 75 百分位数是\_\_\_\_\_。

14. 已知空间向量  $a = (-3, 2, m)$ ,  $b = (-1, -1, 3)$ ,  $c = (1, -4, n)$ , 若  $a, b, c$  共面, 则  $m+n =$ \_\_\_\_\_。

15. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2^x + 1}$ , 则不等式  $f(2x^2 + 3x) + f(2x - 12) > 1$  的解集为\_\_\_\_\_。

16. 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp PB, PA \perp PC, PB \perp PC$ , 且三棱锥  $P-ABC$  的外接球的表面积为  $64\pi$ , 记  $\triangle PAB, \triangle PAC, \triangle PBC$  的面积分别为  $S_1, S_2, S_3$ , 则  $S_1 + S_2 + S_3$  的最大值为\_\_\_\_\_。

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分10分)

已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin^2 x - \sin(2023\pi + x) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求函数  $f(x)$  的最小正周期和单调递增区间;

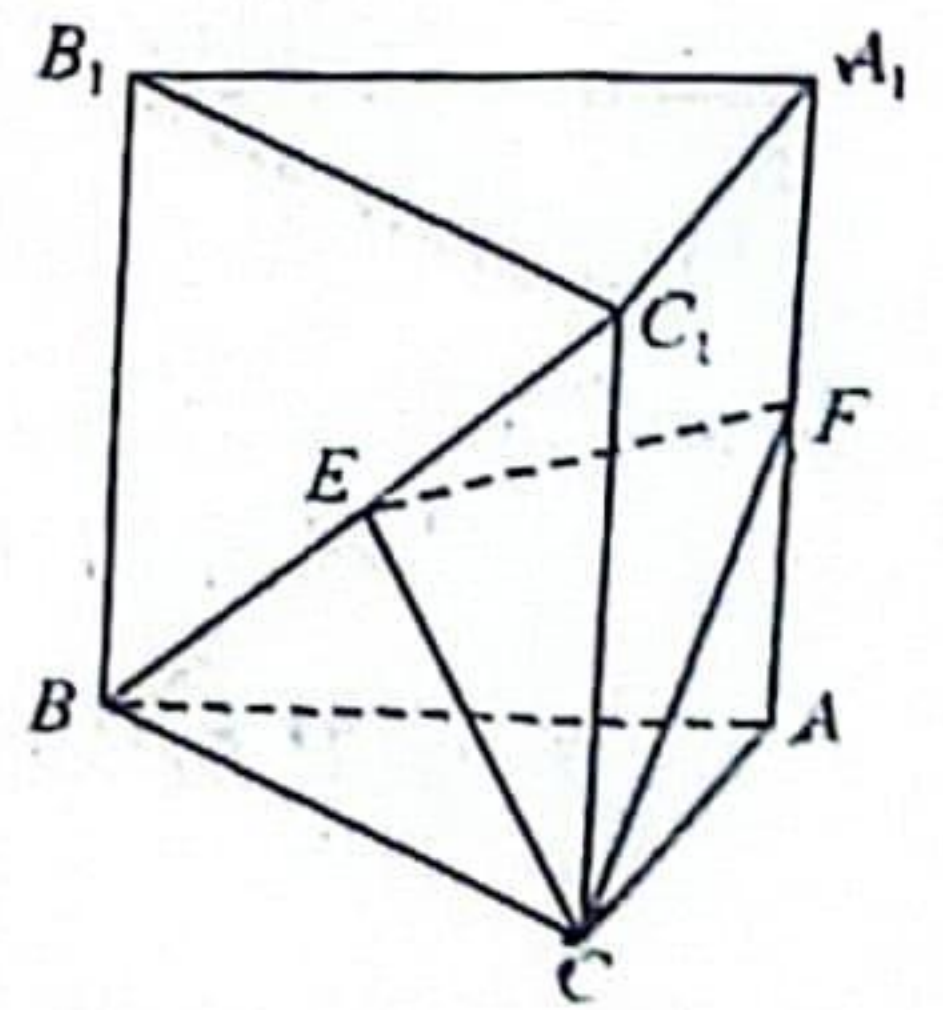
(2) 若  $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ , 且  $f\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{25}$ , 求  $\sin\left(2\alpha - \frac{5\pi}{12}\right)$  的值。

18. (本小题满分12分)

如图, 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB = AC = \frac{1}{2}BB_1$ ,  $AB \perp AC$ ,  $E, F$  分别为线段  $BC_1, AA_1$  的中点。

(1) 求证:  $EF \parallel$  平面  $ABC$ ;

(2) 求平面  $CEF$  与平面  $A_1B_1C_1$  夹角的余弦值。



19. (本小题满分12分)

在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $\frac{\sin C - \sin A}{b \sin C} = \frac{\sin B + \sin A}{(\sin C + \sin A)c}$ 。

(1) 求角  $C$  的大小;

(2) 若  $AB = 3\sqrt{7}$ , 点  $D$  是线段  $AB$  上的一点,  $\angle ACD = \angle BCD, DC = 2$ , 求  $\triangle ABC$  的周长。

20. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + 3a_2 + 5a_3 + \dots + (2n-1)a_n = 4n$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

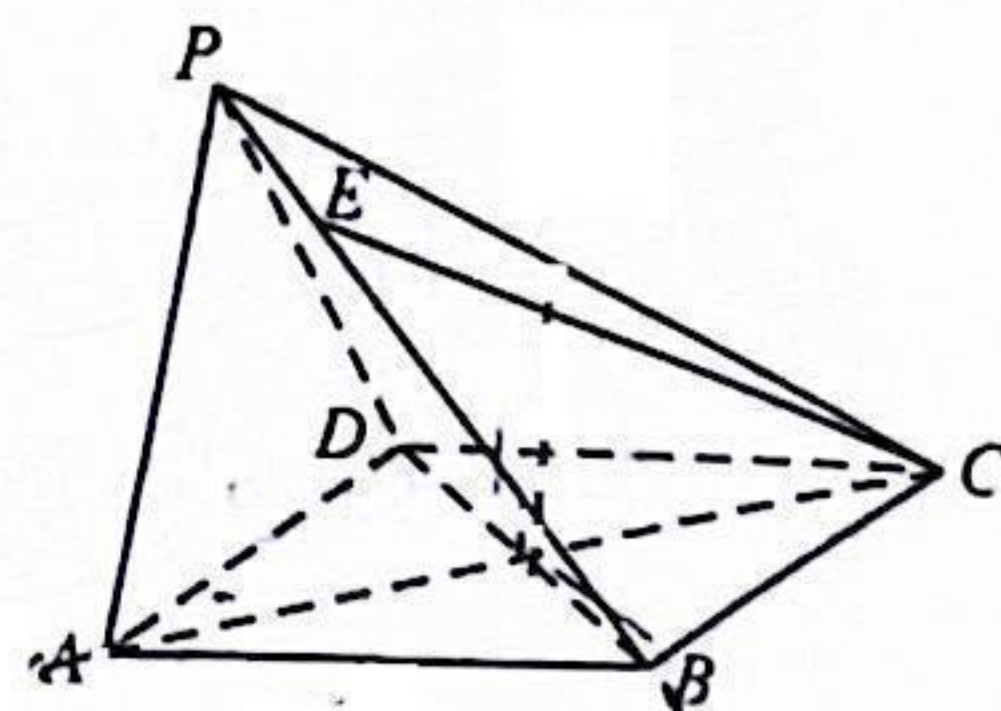
(2) 设  $b_n = \frac{n^2 a_n a_{n+1}}{4}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 求证:  $S_n < 2^n - \frac{1}{2}$ .

21. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 四边形  $ABCD$  是菱形,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AB = 2$ ,  $PB = PD = \frac{\sqrt{10}}{2}$ , 二面角  $P-BD-A$  的大小为  $45^\circ$ , 点  $E$  是棱  $PB$  上的一点.

(1) 求证: 平面  $PAC \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 若直线  $CE$  与平面  $PBD$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{8}$ , 求  $\frac{PE}{EB}$  的值.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - ax$  ( $a \in \mathbf{R}$ ),  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象恰有一个交点, 求  $a$  的取值范围.