

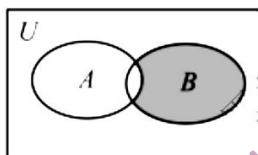
【赢在高考·黄金8卷】备战2024年高考数学模拟卷（七省新高考专用）  
黄金卷

（考试时间：120分钟 试卷满分：150分）

第I卷（选择题）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 全集  $U = \mathbf{R}$ ，集合  $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ ， $B = \{4, 5, 6, 8\}$ ，则阴影部分表示的集合是（ ）



- A.  $\{2, 3, 5, 7, 9\}$     B.  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$     C.  $\{4, 6, 8\}$     D.  $\{5\}$

2. 已知复数  $z = \frac{1+ai}{1-i}$  ( $a \in \mathbf{R}$ )，若  $z$  为纯虚数，则  $a$  的值为

- A.  $-1$     B.  $-\frac{1}{2}$     C.  $\frac{1}{2}$     D.  $1$

3. 若非零向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $(\vec{a} - 4\vec{b}) \perp \vec{a}$ ， $(\vec{b} - \vec{a}) \perp \vec{b}$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角是

- A.  $\frac{\pi}{6}$     B.  $\frac{\pi}{3}$     C.  $\frac{\pi}{2}$     D.  $\frac{5\pi}{6}$

4. 儿童手工制作 (DIY) 对培养孩子的专注力、创造力有很大的促进作用. 如图, 在某节手工课上, 小明将一张半径为  $2\text{cm}$  的半圆形剪纸折成了一个圆锥 (无裁剪无重叠), 接着将毛线编制成一个彩球, 放置于圆锥底部, 制作成一个冰淇淋模型. 已知彩球的表面积为  $16\pi\text{cm}^2$ , 则该冰淇淋模型的高 (圆锥顶点到球面上点的最远距离) 为 ( )



- A.  $2\sqrt{3}\text{cm}$     B.  $(2+2\sqrt{3})\text{cm}$     C.  $6\text{cm}$     D.  $4\sqrt{3}\text{cm}$

5. “ $0 \leq x < 1$ ”是“ $2 + \frac{1}{x} < \frac{5}{2}$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件

6. 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}$ , 若该数列满足  $a_n + 2S_n S_{n-1} = 0 (n \geq 2)$ , 则下列命题中错误的是 ( )

A.  $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$  是等差数列

B.  $S_n = \frac{1}{2n}$

C.  $a_n = -\frac{1}{2n(n-1)}$

D.  $\{S_n\}$  是等比数列

7. 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上有两点  $A, B$ ,  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $C$  的左、右焦点,  $\triangle ABF_1$  是以  $F_1$  为中心的等边三角形, 则椭圆离心率为 ( )

A.  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

B.  $\sqrt{2}-1$

C.  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

D.  $\sqrt{3}-1$

8. 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足: ①  $f(x) + f(2-x) = 0$ , ②  $f(2x-1)$  是奇函数, 则下列结论可能不正确的是 ( )

A.  $f(x)$  是偶函数

B.  $f(x) = f(x+4)$

C.  $f(3) = 0$

D.  $(x-1)f(x)$  关于  $x=1$  对称

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目的要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知圆  $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 1$  和圆  $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ , 则 ( )

A. 圆  $C_2$  的半径为 4

B.  $y$  轴为圆  $C_1$  与  $C_2$  的公切线

C. 圆  $C_1$  与  $C_2$  公共弦所在的直线方程为  $x+2y-1=0$

D. 圆  $C_1$  与  $C_2$  上共有 6 个点到直线  $2x-y-2=0$  的距离为 1

10. 已知由样本数据  $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3, \dots, 10)$  组成的一个样本, 得到经验回归方程为  $\hat{y} = 2x - 0.4$ , 且  $\bar{x} = 2$ , 去除两个样本点  $(-2, 1)$  和  $(2, -1)$  后, 得到新的经验回归方程为  $\hat{y} = 3x + \hat{b}$ . 在余下的 8 个样本数据和新的经验回归方程中 ( )

A. 相关变量  $x, y$  具有正相关关系

B. 新的经验回归方程为  $\hat{y} = 3x - 3$

C. 随着自变量  $x$  值增加, 因变量  $y$  值增加速度变小

D. 样本  $(4, 8.9)$  的残差为  $-0.1$

11. 设抛物线  $C: y^2 = 8x$  的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ , 点  $M$  为  $C$  上一动点,  $E(3,1)$  为定点, 则下列结论正确的是 ( )

- A. 准线  $l$  的方程是  $x = -2$                       B.  $|ME| - |MF|$  的最大值为 2  
C.  $|ME| + |MF|$  的最小值为 7                      D. 以线段  $MF$  为直径的圆与  $y$  轴相切

12. 定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  满足:  $f(x) + f(x) > 1$ ,  $f(0) = 4$ , 则关于不等式  $e^x f(x) > e^x + 3$  的表述正确的为 ( )

- A. 解集为  $(0, +\infty)$                                   B. 解集为  $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$   
C. 在  $[-2, 2]$  上有解                              D. 在  $[-2, 2]$  上恒成立

## 第 II 卷 (非选择题)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.  $(x - \frac{1}{x})(2x + \frac{1}{x})^6$  的展开式中, 常数项为 \_\_\_\_\_.

14. 人类已进入大数据时代. 目前, 数据量已经从 TB (1TB = 1024GB) 级别跃升到

PB (1PB = 1024TB), EB (1EB = 1024PB) 乃至 ZB (1ZB = 1024EB) 级别. 国际数据公司 (IDC) 的研究结果表明, 2008 年全球产生的数据量为 0.500 ZB. 2010 年增长到 1.125 ZB. 若从 2008 年起, 全球产生的数据量  $P$  与年份  $t$  的关系为  $P = P_0 a^{t-2008}$ , 其中  $P_0, a$  均是正的常数, 则 2023 年全球产生的数据量是 2022 年的 \_\_\_\_\_ 倍.

15. 已知函数  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{4}$ , 写出斜率大于  $\frac{1}{2}$  且与函数  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  的图象均相切的直线  $l$  的方程: \_\_\_\_\_.

16. 已知空间四边形  $ABCD$  的各边长及对角线  $BD$  的长度均为 6, 平面  $ABD \perp$  平面  $CBD$ , 点  $M$  在  $AC$  上, 且  $AM = 2MC$ , 过点  $M$  作四边形  $ABCD$  外接球的截面, 则截面面积的最小值为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 其中第 17 题 10 分, 18-22 题 12 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程及验算步骤.

17. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $M$  为  $BC$  边的中点,  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a(a-b)}{2}$ .

(1) 求角  $C$  的大小;

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $4\sqrt{3}$ , 求  $\triangle ABC$  周长的最小值.

18. 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_6 + a_7 = 4$ , 且  $a_1, a_4, a_9$  成等比数列.

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 记  $T_n$  为数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项的乘积, 若  $a_1 < 0$ , 求  $T_n$  的最大值.

19. 目前, 教师职业越来越受青睐, 考取教师资格证成为不少人的就业规划之一. 当前, 中小学教师资格考试分笔试和面试两部分, 笔试通过后才能进入面试环节. 已知某市 2022 年共有 10000 名考生参加了中小学教师资格考试的笔试, 笔试成绩  $\xi \sim N(60, 10^2)$ , 只有笔试成绩高于 70 分的学生才能进入面试环节.

(1) 从报考中小学教师资格考试的考生中随机抽取 6 人, 求这 6 人中至少有一人进入面试的概率;

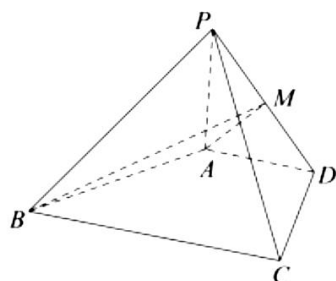
(2) 现有甲、乙、丙 3 名学生进入了面试, 且他们通过面试的概率分别为  $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ , 设这 3 名学生中通过面试的人数为  $X$ , 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望.

参考数据: 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827, P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545, P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973,$$

$$0.84135 \approx 0.3547, 0.97725 \approx 0.8710.$$

20. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AD \perp CD$ , 且  $AD = CD = 2\sqrt{2}$ ,  $BC = 4\sqrt{2}$ ,  $PA = 4$ .



(1) 求证:  $AB \perp PC$ ,

(2) 在线段  $PD$  上是否存在一点  $M$ , 使得二面角  $M-AC-D$  的大小为  $45^\circ$ , 如果存在, 求  $BM$  与平面  $MAC$  所成角的正弦值; 如果不存在, 请说明理由.

21. 已知双曲线  $C$  与双曲线  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$  有相同的渐近线, 且过点  $A(2\sqrt{2}, -1)$ .

(1) 求双曲线  $C$  的标准方程;

(2) 已知点  $D(2, 0)$ ,  $E, F$  是双曲线  $C$  上异于  $D$  的两个不同点, 且  $|\overline{DE} + \overline{DF}| = |\overline{DE} - \overline{DF}|$ , 证明: 直线  $EF$  过定点, 并求出定点坐标.



22. 已知  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 函数  $f(x) = \log_a x + \frac{1}{2}ax^2$ .

(1) 若  $a = e$ , 求函数  $f(x)$  在  $x=1$  处的切线方程;

(2) 若函数  $f(x)$  有两个零点, 求实数  $a$  的取值范围.

【赢在高考·黄金8卷】备战2024年高考数学模拟卷（七省新高考专用）

黄金卷·参考答案

（考试时间：120分钟 试卷满分：150分）

第I卷（选择题）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	D	B	B	A	C	A	A

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目的要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9	10	11	12
BD	ABD	AD	AC

第II卷（非选择题）

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. -40    14. 1.5    15.  $y=x-1$     16.  $12\pi$ .

四、解答题：本题共6小题，共70分，其中第17题10分，18~22题12分，解答应写出必要的文字说明、证明过程及验算步骤。

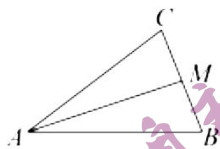
17. (10分)【详解】(1) 因为  $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ ,  $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}$

所以  $\overline{AM} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2}(\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2) = \frac{1}{2}(c^2 - b^2)$

由  $\overline{AM} \cdot \overline{CB} = \frac{a(a-b)}{2}$ , 得  $\frac{1}{2}(c^2 - b^2) = \frac{a(a-b)}{2}$ ,

整理, 得  $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ , 由余弦定理, 得  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$ .

又  $C \in (0, \pi)$ , 故  $C = \frac{\pi}{3}$ .



(2) 由  $\triangle ABC$  的面积为  $4\sqrt{3}$ , 得  $\frac{1}{2}ab \sin C = 4\sqrt{3}$ , 即  $ab = 16$ .

由 (1) 得  $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ ,



所以  $a+b+c = a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab} \geq 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab-ab} = 12$ .

所以当且仅当  $a=b=c=4$  时, 等号成立,

此时  $\triangle ABC$  的周长最小, 且最小值为 12.

18. (12分) 【详解】(1) 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 由  $a_6+a_7=4$ , 得:  $2a_1+11d=4$ ;

由  $a_1, a_4, a_7$  成等比数列, 得:  $a_4^2 = a_1 a_7$ , 即:  $(a_1+3d)^2 = a_1(a_1+4d)$ , 整理得:  $d(2a_1+9d)=0$ .

由  $\begin{cases} 2a_1+11d=4 \\ d(2a_1+9d)=0 \end{cases}$  解得:  $\begin{cases} a_1=2 & \text{或} & a_1=-9 \\ d=0 & \text{或} & d=2 \end{cases}$

所以:  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n=2$  或  $a_n=2n-11$ .

(2) 因为  $a_1 < 0$ , 所以:  $a_n = 2n-11$ ,

得: 当  $n \leq 5$  时,  $a_n < 0$ ; 当  $n \geq 6$  时,  $a_n > 0$ .

从而  $T_1 < 0, T_2 > 0, T_3 < 0, T_4 > 0, T_5 < 0, T_n < 0 (n \geq 5)$ ,

又因为:  $T_2 = a_1 a_2 = 63, T_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 = 945$ , 所以:  $T_n$  的最大值为  $T_4 = 945$ .

故  $T_n$  的最大值为 945.

19. (12分) 【详解】(1) 记“至少有一人进入面试”为事件 A, 由已知得:  $\mu = 60, \sigma = 10$ ,

所以  $P(\xi \leq 70) = \frac{1+P(|X-\mu| \leq \sigma)}{2} \approx \frac{1+0.6827}{2} = 0.84135$ ,

则  $P(A) = 1 - 0.84135^6 \approx 1 - 0.3547 = 0.6453$ ,

即这 6 人中至少有一人进入面试的概率为 0.6453.

(2)  $X$  的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \left(1-\frac{3}{4}\right) \times \left(1-\frac{2}{3}\right) \times \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24},$$

$$P(X=1) = \frac{3}{4} \times \left(1-\frac{2}{3}\right) \times \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \times \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{3}{4}\right) \times \left(1-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \times \left(1-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} + \left(1-\frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{24},$$

$$P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

则随机变量  $X$  的分布列为:



$X$	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{11}{24} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{23}{12}$$

20. (12分) 【详解】(1)  $\because AD = CD = 2\sqrt{2}, BC = 4\sqrt{2}, AB = AC = 4, \therefore AB^2 + AC^2 = BC^2, \therefore AB \perp AC$

$\because PA \perp$  平面  $ABCD, \therefore AB \perp PA$ .

$\because PA \subset$  面  $PAC, AC \subset$  面  $PAC$  且  $PA \cap AC = A,$

$\therefore AB \perp$  平面  $PAC,$

$\therefore AB \perp PC.$

(2) 取  $BC$  的中点  $E$ , 连接  $AE$ , 则  $AE \perp BC$ ,

建立如图所示的空间直角坐标系,

$A(0, 0, 0), C(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), D(0, 2\sqrt{2}, 0), P(0, 0, 4),$

$B(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{PD} = (0, 2\sqrt{2}, -4), \overrightarrow{AC} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0),$

设  $\overrightarrow{PM} = t\overrightarrow{PD} (0 \leq t \leq 1)$

则点  $M$  为  $(0, 2\sqrt{2}t, 4-4t),$

所以  $\overrightarrow{AM} = (0, 2\sqrt{2}t, 4-4t),$

设平面  $MAC$  的法向量是  $\vec{n} = (x, y, z),$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 2\sqrt{2}ty + (4-4t)z = 0 \end{cases}$$

令  $x=1, \vec{n} = (1, -1, \frac{\sqrt{2}t}{2-2t}),$  (易知  $t=1$  不合题意)

又  $\vec{m} = (0, 0, 1)$  是平面  $ACD$  的一个法向量,

$$\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\frac{\sqrt{2}t}{2-2t}}{\sqrt{2 + (\frac{\sqrt{2}t}{2-2t})^2}} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

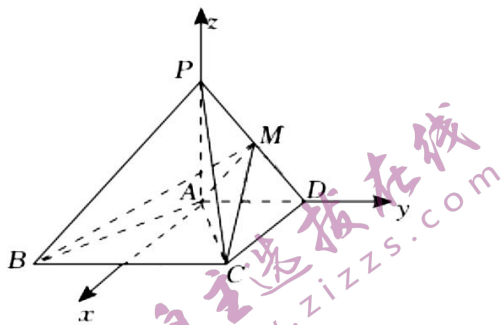
解得  $t = \frac{2}{3}$  ( $t=2$  舍去), 则  $M(0, \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}).$

此时平面  $MAC$  的一个法向量可取  $\vec{n} = (1, -1, \sqrt{2})$ ,  $\vec{BM} = (-2\sqrt{2}, \frac{10\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3})$ ,

设  $BM$  与平面  $MAC$  所成的角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{BM} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{BM}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{BM}|} = \frac{1}{2},$$

$\therefore BM$  与平面  $MAC$  所成角的正弦值为  $\frac{1}{2}$ .



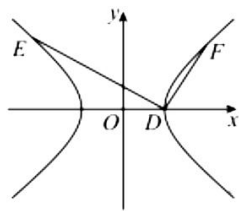
21. (12分) 【详解】(1) 因为双曲线  $C$  与已知双曲线有相同的渐近线,

设双曲线  $C$  的标准方程为  $x^2 - 4y^2 = \lambda$ ,

代入点  $A(2\sqrt{2}, -1)$  坐标, 得  $(2\sqrt{2})^2 - 4 \times (-1)^2 = \lambda$ , 解得  $\lambda = 4$ ,

所以双曲线  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(2) 当直线  $EF$  斜率存在时, 设  $EF: y = kx + m$ ,



设  $E(x_1, y_1)F(x_2, y_2)$ , 联立  $y = kx + m$  与双曲线  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ,

化简得  $(4k^2 - 1)x^2 + 8kmx + 4(m^2 + 1) = 0$ ,

$\Delta = (8km)^2 - 4(4m^2 + 4)(4k^2 - 1) > 0$ , 即  $4k^2 - m^2 - 1 < 0$ ,

$$\text{则有 } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 - 1} \\ x_1 x_2 = \frac{4m^2 + 4}{4k^2 - 1} \end{cases},$$

又  $y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$ ,

因为  $|\overline{DE} + \overline{DF}| = |\overline{DE} - \overline{DF}|$ , 所以  $\overline{DE} \cdot \overline{DF} = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = 0$

所以  $(k^2 + 1) \cdot x_1 x_2 + (km - 2) \cdot (x_1 + x_2) + m^2 + 4 = 0$ ,

所以  $(k^2 + 1) \cdot \frac{4m^2 + 4}{4k^2 - 1} + (km - 2) \cdot \frac{-8km}{4k^2 - 1} + m^2 + 4 = 0$ ,

化简得  $3m^2 + 16km + 20k^2 = 0$ ,

即  $(3m + 10k)(m + 2k) = 0$ ,

所以  $m_1 = -2k, m_2 = -\frac{10}{3}k$ ,

且均满足  $4k^2 - m^2 - 1 < 0$ ,

当  $m_1 = -2k$  时, 直线  $l$  的方程为  $y = k(x - 2)$ , 直线过定点  $(2, 0)$ , 与已知矛盾,

当  $m_2 = -\frac{10}{3}k$  时, 直线  $l$  的方程为  $y = k\left(x - \frac{10}{3}\right)$ , 过定点  $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

(ii) 当直线  $EF$  斜率不存在时, 由对称性不妨设直线  $DE: y = x - 2$ ,  
与双曲线  $C$  方程联立解得  $x_1 = x_2 = \frac{10}{3}$ , 此时  $EF$  也过点  $M\left(\frac{10}{3}, 0\right)$ .

综上, 直线  $EF$  过定点  $M\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

22. (12分) 【详解】(1) 解: 当  $a = e$  时,  $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}ex^2$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{x} + ex$ ,

故  $f'(1) = \frac{1}{1} + e = 1 + e$ ,

$x = 1$  时,  $f(1) = \ln 1 + \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}e$ , 故切点为  $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ ,

所以  $f(x)$  在  $x = 1$  处的切线方程为  $y - \frac{1}{2}e = (1 + e)(x - 1)$ ,

即  $y = (1 + e)x - \frac{1}{2}e - 1$ .

(2) 函数  $f(x)$  有两个零点,

$\Leftrightarrow$  方程  $\log_a x + \frac{1}{2}ax^2 = 0$  在  $x \in (0, +\infty)$  上有两个根,

$\Leftrightarrow$  方程  $\frac{\ln x}{x^2} = -\frac{1}{2}a \ln a$  在  $x \in (0, +\infty)$  上有两个根,

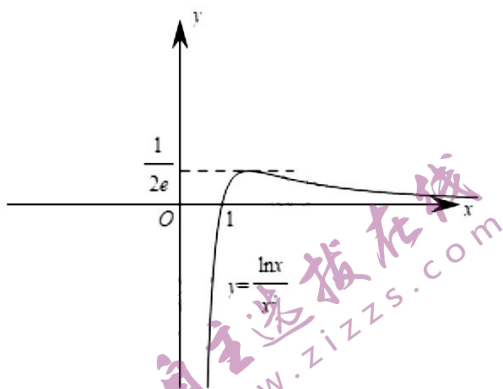
$\Leftrightarrow$  函数  $y = \frac{\ln x}{x^2}$  与  $y = -\frac{1}{2}a \ln a$  的图象在  $x \in (0, +\infty)$  上有两个交点,

设  $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ , 则  $g'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$ ,

$g'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^2} > 0$  时,  $0 < x < \sqrt{e}$ ;  $g'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^2} < 0$  时,  $x > \sqrt{e}$ ,

所以  $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$  在  $(0, \sqrt{e})$  上单调递增, 在  $(\sqrt{e}, +\infty)$  上单调递减,

由  $g(1) = 0$ ,  $g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$ , 当  $x > 1$  时,  $g(x) > 0$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $g(x) \rightarrow 0$ , 作图如下:



由图得  $0 < -\frac{1}{2} a \ln a < \frac{1}{2e}$ , 即  $-\frac{1}{e} < a \ln a < 0$ ,

设  $h(x) = x \ln x (x > 0)$ , 则  $h'(x) = 1 + \ln x$ ,

$h'(x) = 1 + \ln x > 0$  时,  $x > \frac{1}{e}$ ,  $h'(x) = 1 + \ln x < 0$  时,  $0 < x < \frac{1}{e}$ ;

所以  $h(x) = x \ln x$  在  $(0, \frac{1}{e})$  上单调递减, 在  $(\frac{1}{e}, +\infty)$  上单调递增,

因为  $0 < x < 1$  时  $\ln x < 0$ , 且  $h(1) = 0$ ,

所以当  $0 < x < 1$  时,  $-\frac{1}{e} \leq h(x) < 0$ ; 当  $x > 1$  时,  $h(x) > 0$ ,

又因为  $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ ,

所以  $-\frac{1}{e} < x \ln x < 0$  的解集为  $(0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, 1)$

综上所述  $a \in (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, 1)$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线