2023～2024 学年安徽县中联盟高三 12 月联考·数学试题
参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	D	A	D	C	D	C	BC	BD	ABD	ACD

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

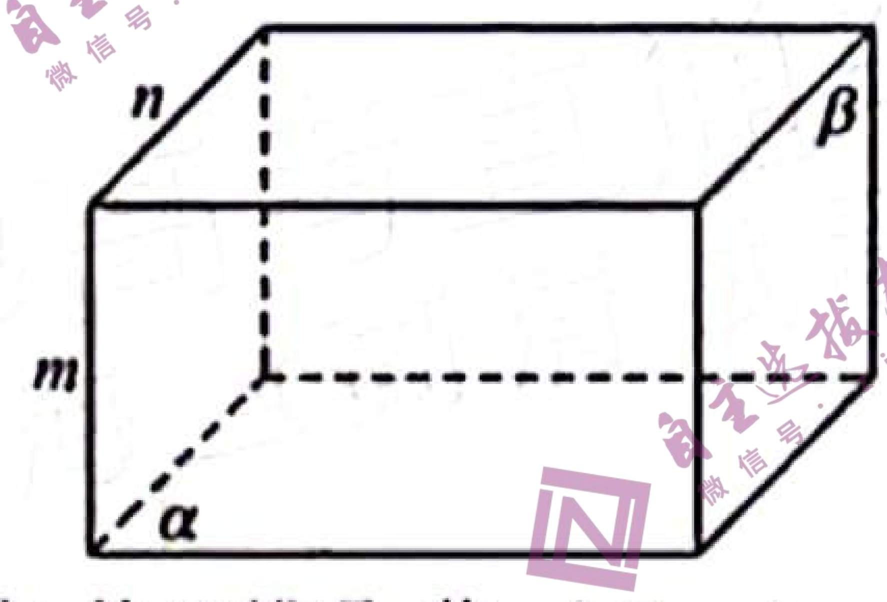
1. C 【解析】$B=\{x|y=\lg(x-1)\}=(1,+\infty)$，所以 $\complement_U B=(-\infty,1]$，所以 $A\cap(\complement_U B)=\{-1,0,1\}$. 故选 C.

2. B 【解析】因为 $(4i-3)z=|\sqrt{3}-i|+i$，所以 $z=\frac{|\sqrt{3}-i|+i}{4i-3}=\frac{2+i}{4i-3}=\frac{(2+i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=-\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i$，所以 $\bar{z}=-\frac{2}{25}+\frac{11}{25}i$，所以 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $\left(-\frac{2}{25},\frac{11}{25}\right)$，位于第二象限. 故选 B.

3. D 【解析】设圆台的母线长为 l，高为 h，所以 $\pi\times1^2+\pi\times3^2+\pi\times(1+3)l=26\pi$，解得 $l=4$，所以 $h=\sqrt{l^2-(3-1)^2}=2\sqrt{3}$，所以该圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\times(\pi\times1^2+\pi\times3^2+\sqrt{\pi\times1^2\times\pi\times3^2})\times2\sqrt{3}=\frac{26\sqrt{3}\pi}{3}$. 故选 D.

4. A 【解析】因为 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，所以 $\frac{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{6}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{6}$. 故选 A.

5. D 【解析】若 $\alpha/\!/\beta$，$m/\!/\beta$，则 $m/\!/\alpha$ 或 $m\subset\alpha$，故 A 错误；由 $\alpha\perp\beta$，则设 $\alpha\cap\beta=a$，当 $m/\!/a/\!/n$ 时，也是符合条件的，故 B 错误；在长方体中，如图所示：



满足 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n/\!/\beta$，此时 α 与 β 相交，故 C 错误；若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $m\perp n$，故 D 正确. 故选 D.

6. C 【解析】因为 $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n$ $(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列，又 $a_1=10$，$a_2=8$，所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_2-a_1=-2$，所以 $a_n=a_1+d(n-1)=12-2n$，所以 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_6=0$，所以 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{(10+12-2n)n}{2}=11n-n^2$，所以数列 $\{|a_n|\}$ 的前 15 项和为 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{15}|=(a_1+a_2+\cdots+a_6)+(-a_7-a_8-\cdots-a_{15})=-S_{15}+2S_6=120$. 故选 C.

7. D 【解析】因为 $N=4^8\times15^{10}$，所以 $\lg N=\lg4^8+\lg15^{10}=\lg2^{16}+10(\lg3+\lg5)=16\lg2+10\lg3+10(1-\lg2)=6\lg2+10\lg3+10\approx6\times0.3010+10\times0.4771+10=16.577$，所以 $N=10^{16.577}\in(10^{16},10^{17})$. 故选 D.

8. C 【解析】因为 $a\cos C=(4\sin A-\cos A)c$，由正弦定理得 $\sin A\cos C=(4\sin A-\cos A)\sin C$，所以 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=4\sin A\sin C=\sin(A+C)=\sin B$，所以 $4\sin A\sin C\sin B=\sin^2B$，由正弦定理得 $b^2=4ac\sin B$，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4ac\sin B$，所以 $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=4\sin B+2\cos B=2\sqrt{5}\sin(B+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$，此时 $\sin(B+\varphi)=1$. 故选 C.

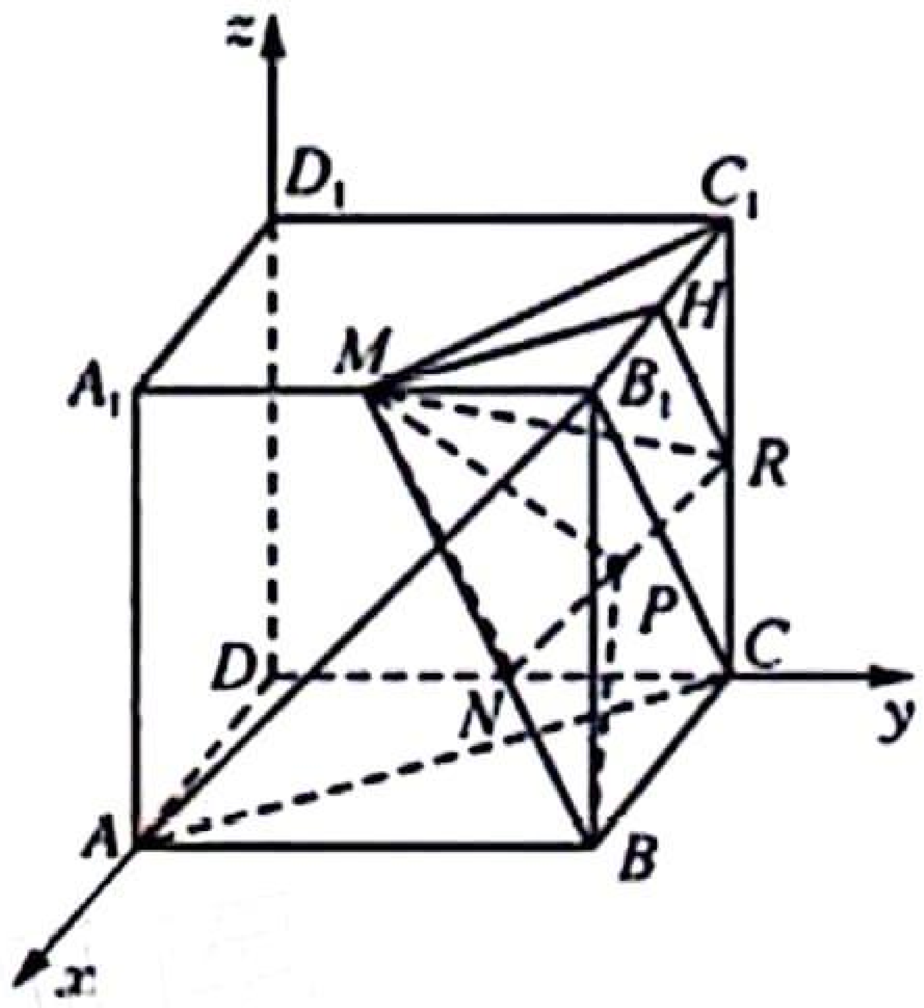
二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9. BC 【解析】因为 $B\subseteq A$，所以 $P(A\cup B)=P(A)=0.6$，故 A 错误；若 A 与 B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.9$，故 B 正确；因为 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以 A 与 B 相互独立，故 C 正确；因为 A 与 B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)=0.18$，所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.72$，故 D 错误. 故选 BC.

10. BD 【解析】因为 $a>0$，$b>0$，$a+3b=1$，所以 $a=1-3b$，$0<b<\frac{1}{3}$，所以 $b(a+1)=$

$-3\left(b-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$，又 $0<b<\frac{1}{3}$，所以 $b(a+1)<\frac{1}{3}$，故 A 错误；$a^2+b^2=(1-3b)^2+b^2=10\left(b-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\geqslant\frac{1}{10}$，当且仅当 $b=\frac{3}{10}$ 时等号成立，故 B 正确；$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\right)(a+3b)=1+\frac{3b}{a}+\frac{3a}{b}+9\geqslant 2\sqrt{\frac{3b}{a}\cdot\frac{3a}{b}}+10=16$，当且仅当 $\frac{3b}{a}=\frac{3a}{b}$，即 $a=b=\frac{1}{4}$ 时等号成立，所以 $\frac{1}{a}+\frac{3}{b}$ 的最小值为 16，故 C 错误；$2^a+8^b=2^a+2^{3b}\geqslant 2\sqrt{2^a\cdot 2^{3b}}=2\sqrt{2^{a+3b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=3b$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{6}$ 时等号成立，故 2^a+8^b 的最小值为 $2\sqrt{2}$，故 D 正确．故选 BD．

11. ABD 【解析】若点 P 是线段 CC_1 的中点，则 $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}-(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1M})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$，故 A 正确；记点 M 关于平面 CDD_1C_1 的对称点为 M'，所以 $\triangle MPB$ 的周长 $BM+PB+PM=BM+PB+PM'\geqslant BM+BM'=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}+\sqrt{2^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{21}}{2}$，故 B 正确；以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示．所以 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$M\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，$C_1(0,1,1)$，$C(0,1,0)$，所以 $\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{BM}=\left(0,-\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$，所以 $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}(0,1,1)-\left(1,\frac{1}{2},1\right)=\left(-1,-\frac{1}{6},-\frac{2}{3}\right)$．设平面 MPB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，所以



$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MP}=-x-\frac{1}{6}y-\frac{2}{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}y+z=0.\end{cases}$$

令 $y=2$，解得 $x=-1$，$z=1$，所以平面 MPB 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-1,2,1)$，所以点 C 到平面 MPB 的距离 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，故 C 错误；取 CC_1 的中点为 R，取 CD 的中点为 N，取 B_1C_1 的中点为 H，如图所示．因为 R 是 CC_1 的中点，H 是 B_1C_1 的中点，所以 $B_1C/\!/HR$．因为 $HR\not\subset$ 平面 AB_1C，$B_1C\subset$ 平面 AB_1C，所以 $HR/\!/$ 平面 AB_1C，同理可得 $MH/\!/$ 平面 AB_1C，又 $HR\cap MH=H$，HR，$MH\subset$ 平面 $MNRH$，所以平面 $MNRH/\!/$ 平面 AB_1C．又 $MP\subset$ 平面 $MNRH$，所以点 P 的轨迹为线段 NR．由 $AB=1$，得 $MN=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$NR=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$MC_1=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$MR=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $MN^2=NR^2+MR^2$，即 $\angle MRN$ 为直角，所以线段 MP 长度的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$，故 D 正确．故选 ABD．

12. ACD 【解析】$y=f(x)-\mathrm{e}g(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\ln x$，所以 $y'=\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}}{x}=\frac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$y'<0$，当 $x>1$ 时，$y'>0$，所以 $y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\ln x$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $y=f(x)-\mathrm{e}g(x)$ 的极值点为 1，故 A 正确；设 $h(x)=f(x)-g(x)=\mathrm{e}^x-\ln x$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$，所以 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}-\mathrm{e}<0$，$h'(1)=\mathrm{e}-1>0$，则存在 $x_0\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$，使得 $h'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，即 $\mathrm{e}^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}+x_0$，又 $x_0\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$，则 $\frac{1}{x_0}+x_0>2$，故 B 错误；易知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于 $y=x$ 对称，且 $f(x)$ 与 $y=x+1$ 切于 $A(0,1)$，$g(x)$ 与 $y=x-1$ 切于 $B(1,0)$，所以 $|PQ|$ 的最小值为 $|AB|=\sqrt{2}$，故 C 正确；若 $f(ax)-g(x)\geqslant(1-a)x$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 $\mathrm{e}^{ax}+ax\geqslant x+\ln x=\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立

$x+e^x$，则$F'(x)=1+e^x>0$，所以$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，则$ax\geqslant\ln x$，即$a\geqslant\frac{\ln x}{x}$. 令$u(x)=\frac{\ln x}{x}$，所以$u'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当$0<x<e$时，$u'(x)>0$，$u(x)$单调递增，当$x>e$时，$u'(x)<0$，$u(x)$单调递减，所以$u(x)_{\max}=u(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$，所以$a\geqslant\frac{1}{e}$，即$a$的最小值为$\frac{1}{e}$，故D正确. 故选ACD.

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13.【答案】50

【解析】先按照从小到大排序：15，18，23，24，28，36，39，42，47，53，60，78，共12个数据，$12\times75\%=9$，第9，10个数据分别为47，53，则第75百分位数为$\frac{47+53}{2}=50$.

14.【答案】6

【解析】若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面，则存在实数$x,y$，使得$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，即$(1,-4,n)=x(-3,2,m)+y(-1,-1,3)=(-3x-y,2x-y,mx+3y)$，所以$\begin{cases}-3x-y=1,\\2x-y=-4,\\mx+3y=n,\end{cases}$解得$x=-1,y=2,-m+6=n$，所以$m+n=6$.

15.【答案】$\left(-4,\frac{3}{2}\right)$

【解析】令$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$，易得$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，又$g(-x)=\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{2^x}{2^x+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2^x+1}+\frac{1}{2}=-g(x)$，所以$g(x)$是奇函数. 由$f(2x^2+3x)+f(2x-12)>1$，得$g(2x^2+3x)+\frac{1}{2}+g(2x-12)+\frac{1}{2}>1$，所以$g(2x^2+3x)>-g(2x-12)=g(-2x+12)$，又$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，所以$2x^2+3x<-2x+12$，解得$-4<x<\frac{3}{2}$，即不等式$f(2x^2+3x)+f(2x-12)>1$的解集为$\left(-4,\frac{3}{2}\right)$.

16.【答案】32

【解析】设三棱锥$P-ABC$的外接球的半径为R，所以$4\pi R^2=64\pi$，解得$R=4$. 设$PA=a,PB=b,PC=c$，因为$PA\perp PB,PA\perp PC,PB\perp PC$，所以由长方体模型可知$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}=R$，即$a^2+b^2+c^2=64$. 所以$S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}(ab+ac+bc)\leqslant\frac{1}{4}[(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)]=\frac{1}{4}\times2\times64=32$，当且仅当$a=b=c=\frac{8\sqrt{3}}{3}$时等号成立，所以$S_1+S_2+S_3$的最大值为32.

四、解答题：本大题共6小题，共70分。

17.（本小题满分10分）

解：(1)由题意知$f(x)=\sqrt{3}\sin^2x-\sin(2\,023\pi+x)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\sin^2x+\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\times\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}\cos 2x}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，…………3分

故函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. …………4分

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

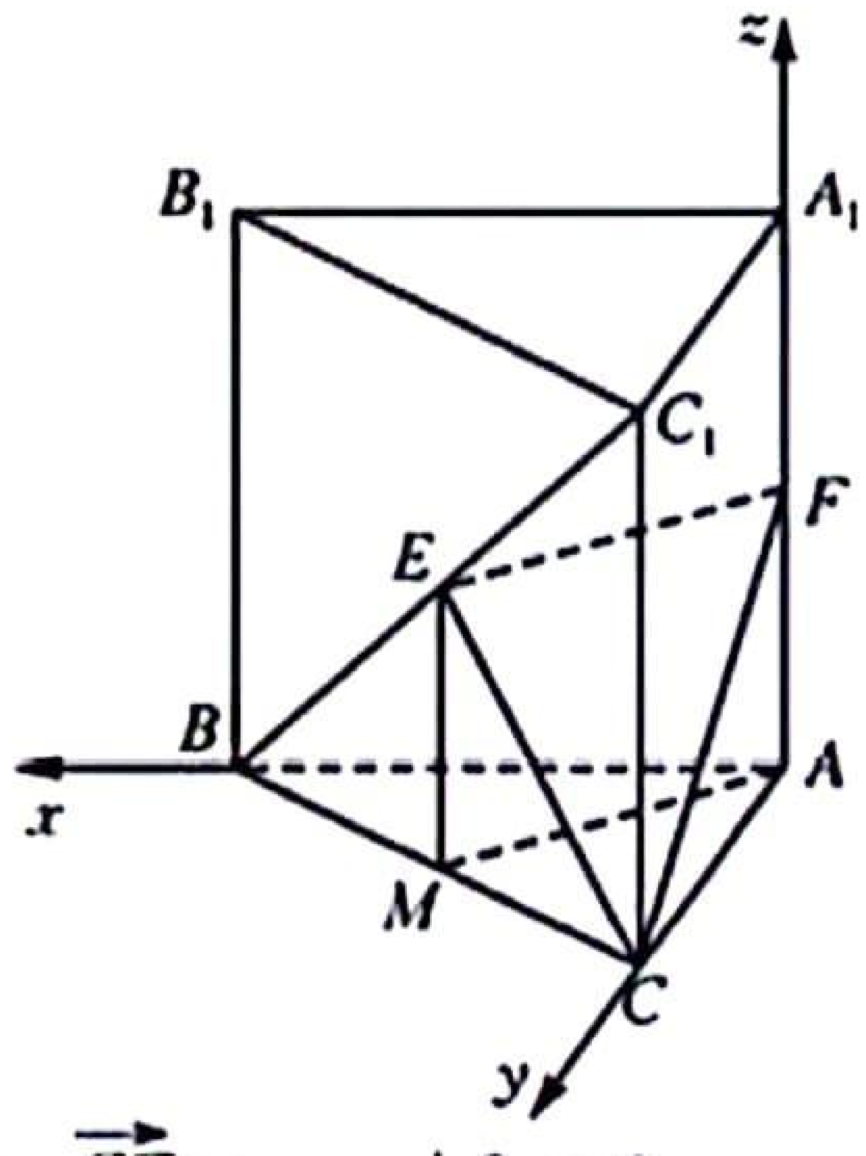
所以$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$. …………5分

(2)因为$f\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{7}{25}$，又$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，所以$2\alpha-\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right)$，

所以$\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)}=-\frac{24}{25}$，…………7分

所以$\sin\left(2\alpha-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{17\sqrt{2}}{50}$. …………10分

18.（本小题满分 12 分）



(1)证明：取 BC 中点 M，连接 AM，EM，如图所示.

在$\triangle BCC_1$ 中，E 为 BC_1 中点，M 为 BC 中点，所以 $EM=\frac{1}{2}CC_1$ 且 $EM/\!/CC_1$，……………………………………………… 1 分

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=CC_1$ 且 $AA_1/\!/CC_1$，

因为 F 为 AA_1 中点，所以 $ME=AF$ 且 $ME/\!/AF$，…………………… 3 分

所以四边形 $EFAM$ 为平行四边形，所以 $EF/\!/AM$，…………………… 5 分

又 $AM\subset$平面 ABC，$EF\not\subset$平面 ABC，所以 $EF/\!/$平面 ABC.

(2)解：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$平面 ABC，又 AB，$AC\subset$平面 ABC，所以 $AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$. 以 A 为坐标原点，AB，AC，AA_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示. 不妨设 $AB=2$，所以 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,4)$，$C(0,2,0)$，$E(1,1,2)$，$F(0,0,2)$，所以 $\overrightarrow{CE}=(1,-1,2)$，$\overrightarrow{CF}=(0,-2,2)$. 设平面 CEF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=x-y+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=-2y+2z=0,\end{cases}$

令 $y=1$，解得 $x=-1$，$z=1$，所以平面 CEF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$. ………………………… 8 分

又易得平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4)$，……………………………………………… 9 分

设平面 CEF 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AA_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AA_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{4\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

即平面 CEF 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………… 12 分

19.（本小题满分 12 分）

解：(1)因为$\frac{\sin C-\sin A}{b\sin C}=\frac{\sin B+\sin A}{(\sin C+\sin A)c}$，由正弦定理得$\frac{c-a}{bc}=\frac{b+a}{(c+a)c}$，即 $a^2+b^2-c^2=-ab$，… 2 分

由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$，……………………………………………… 4 分

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………………… 5 分

(2)因为$\angle ACD=\angle BCD$，所以$\angle ACD=\angle BCD=\frac{\pi}{3}$，又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$，

所以$\frac{1}{2}ab\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}b\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}a\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}$，即 $ab=2(b+a)$. ……………………………… 7 分

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AB^2=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos\angle ACB$，

所以$(3\sqrt{7})^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3}=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab=(a+b)^2-2(a+b)$，……………… 9 分

解得 $a+b=9$ 或 $a+b=-7$(舍)，……………………………………………… 10 分

所以$\triangle ABC$ 的周长 $l=a+b+c=9+3\sqrt{7}$. ……………………………………………… 12 分

20.（本小题满分 12 分）

(1)解：因为数列$\{a_n\}$满足 $a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n=4n$，

当 $n=1$ 时，$a_1=4$；……………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1+3a_2+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=4(n-1)$，所以$(2n-1)a_n=4$，所以 $a_n=\frac{4}{2n-1}$. ………… 3 分

当 $n=1$ 时，$a_1=4$，上式也成立，所以 $a_n=\frac{4}{2n-1}$. ……………………………………………… 4 分

(2)证明：由(1)知 $b_n=\frac{n^2a_na_{n+1}}{4}=\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，……………………… 6 分

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times1-1}-\frac{1}{2\times2-1}\right)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times2-1}-\frac{1}{2\times3-1}\right)+\cdots+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times1-1}-\frac{1}{2\times2-1}+\frac{1}{2\times2-1}-\frac{1}{2\times3-1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$. ……………………………………………… 8 分

令 $c_n=2^n-\frac{1}{2}-S_n=2^n-n-1+\frac{1}{2(2n+1)}$，所以 $c_{n+1}-c_n=2^{n+1}-(n+1)-1+$

$\left[2^n-n-1+\frac{1}{2(2n+1)}\right]=2^n-1-\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{1}{2(2n+3)}$. …………………………………………………… 9 分

又 $\frac{1}{2(2n+1)}\leqslant\frac{1}{6}$，所以 $2^n-1-\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{1}{2(2n+3)}>2^n-1-\frac{1}{6}=2^n-\frac{7}{6}>0$，

所以 $\{c_n\}$ 是递增数列，…………………………………………………………………………………… 10 分

所以 $c_n\geqslant c_1=2-1-1+\frac{1}{2\times(2\times1+1)}=\frac{1}{6}>0$，

所以 $S_n<2^n-\frac{1}{2}$. …………………………………………………………………………………… 12 分

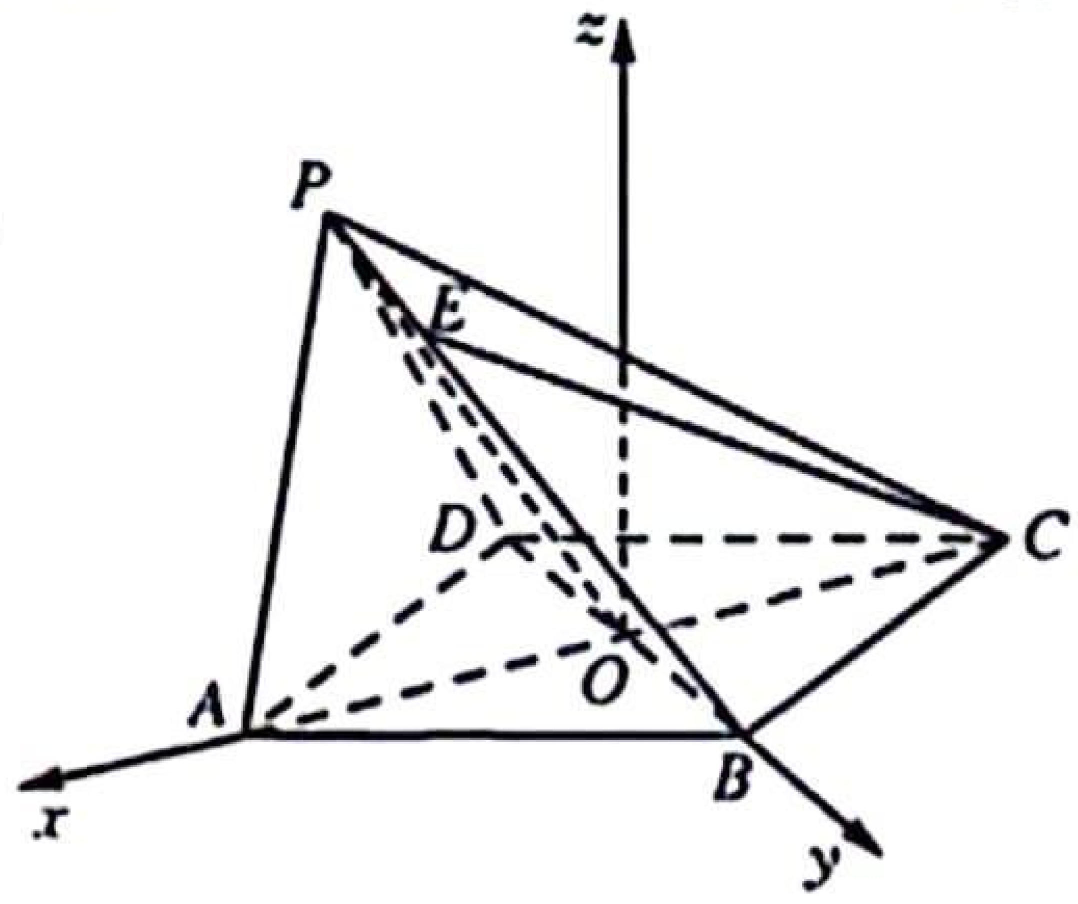
21.（本小题满分 12 分）

(1)证明：设 $AC\cap BD=O$，连接 PO，如图所示.

在菱形 $ABCD$ 中，O 为 BD 中点，且 $BD\perp AC$，因为 $PB=PD$，所以 $BD\perp PO$. ………………… 1 分

又 $PO\cap AC=O$，PO，$AC\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp$ 平面 PAC. …… 3 分

又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$. ……………… 5 分



(2)解：以 O 为坐标原点，OA，OB 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，过点 O 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示.

因为 $OA\perp BD$，$OP\perp BD$，所以 $\angle POA$ 为二面角 $P-BD-A$ 的平面角，所以 $\angle POA=45^\circ$. ……………………………………………………… 6 分

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=2$，$PB=PD=\frac{\sqrt{10}}{2}$，所以

$PO=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B(0,1,0)$，$D(0,-1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$.

所以 $\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 PBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=\frac{\sqrt{3}}{2}x-y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，解得 $y=0$，$z=-1$，

所以平面 PBD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$. …………………………………………………… 8 分

设 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

所以 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=(\sqrt{3},1,0)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\sqrt{3},1-\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$，

设直线 CE 与平面 PBD 所成角的大小为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CE}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CE}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+1}\times\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\sqrt{3}\right)^2+(1-\lambda)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)^2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{5\lambda^2+2\lambda+8}}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，…………………………………………………………………… 10 分

解得 $\lambda=\frac{4}{5}$ 或 $\lambda=-\frac{6}{5}$（舍），……………………………………………………………… 11 分

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BP}$，所以 $\frac{PE}{EB}=\frac{1}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

22.（本小题满分 12 分）

解：(1)易得 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x+1}+x-a=\frac{x^2+(1-a)x+1-a}{x+1}$. ………… 1 分

令 $u(x)=x^2+(1-a)x+1-a$，$x\in(-1,+\infty)$，

若 $-\frac{1-a}{2}\leqslant-1$，即 $a\leqslant-1$ 时，$u(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $u(x)>u(-1)=1>0$，

所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. …………………………………………… 2 分

若 $-\frac{1-a}{2}>-1$，即 $a>-1$ 时，

当 $\Delta=(1-a)^2-4(1-a)\leqslant0$，即 $-1<a\leqslant1$ 时，$u(x)\geqslant0$，所以 $f'(x)\geqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增； ………………………………………………………………………………………… 3 分

当 $\Delta=(1-a)^2-4(1-a)>0$，即 $a>1$ 时，令 $u(x)=0$，解得 $x=\frac{a-1-\sqrt{a^2+2a-3}}{2}$ 或x=

$\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+2a-3}}{2}$，所以当 $-1<x<\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+2a-3}}{2}$ 或 $x>\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+2a-3}}{2}$ 时，$u(x)>0$，即 $f'(x)>0$；当 $\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+2a-3}}{2}<x<\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+2a-3}}{2}$ 时，$u(x)<0$，即 $f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+2a-3}}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+2a-3}}{2},\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+2a-3}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+2a-3}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增. ………………………………………… 4 分

综上，当 $a\leqslant1$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+2a-3}}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+2a-3}}{2},\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+2a-3}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+2a-3}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)令 $h(x)=f(x)-g(x)=\ln(x+1)-ax+\sin x$，

函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象恰有一个交点，等价于 $h(x)$ 恰有一个零点，

又 $h(0)=0$，即函数 $h(x)$ 除 0 之外无其他零点，$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a+\cos x$，

令 $m(x)=\dfrac{1}{x+1}-a+\cos x$，所以 $m'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\sin x$，

当 $-1<x<0$ 时，$-\dfrac{1}{(x+1)^2}<-1$，则 $m'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\sin x<0$，所以 $m(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，即 $h'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减.

若 $a\leqslant0$，当 $-1<x<0$ 时，$\ln(x+1)<0$，$\sin x<0$，则 $h(x)=\ln(x+1)-ax+\sin x<0$，

当 $0<x<\pi$ 时，$\ln(x+1)>0$，$\sin x>0$，则 $h(x)=\ln(x+1)-ax+\sin x>0$，

当 $x\geqslant\pi$ 时，$\ln(x+1)>1$，$\ln(x+1)+\sin x>0$，则 $h(x)=\ln(x+1)-ax+\sin x>0$，

所以 $h(x)$ 恰有一个零点，符合题意；……………………………………………………… 6 分

若 $0<a<2$，当 $0<x<\pi$ 时，$m'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\sin x<0$，所以 $m(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，即 $h'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，又 $h'(0)=2-a>0$，$h'(\pi)=\dfrac{1}{\pi+1}-a-1<0$，

则存在 $x_0\in(0,\pi)$，使得 $h'(x_0)=0$，即 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,π) 上单调递减，

所以 $h(x_0)>h(0)=0$.

令 $\varphi(x)=\ln(x+1)-2\sqrt{x}$，所以 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-x-1}{(x+1)\sqrt{x}}=\dfrac{-\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}{(x+1)\sqrt{x}}<0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi(0)=0$，所以 $\ln(x+1)\leqslant2\sqrt{x}$，所以 $h(x)=\ln(x+1)-ax+\sin x<2\sqrt{x}-ax+1=\sqrt{x}(2-a\sqrt{x})+1$，所以 $h(\dfrac{16}{a^2})<\sqrt{\dfrac{16}{a^2}}\left(2-a\sqrt{\dfrac{16}{a^2}}\right)+1=-\dfrac{8}{a}+1<0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(x_0,\dfrac{16}{a^2}\right)$ 上至少存在 1 个零点，不合题意；……………………………………………… 8 分

若 $a=2$，当 $-1<x<0$ 时，由上知 $h'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，所以 $h'(x)>h'(0)=2-a=0$，则 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，即 $h(x)<h(0)=0$，

当 $x>0$ 时，令 $n(x)=\ln(x+1)-x$，$x>0$，则 $n'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}<0$，即 $n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $n(x)<n(0)=0$，即 $\ln(x+1)<x$，

令 $t(x)=\sin x-x$，则 $t'(x)=\cos x-1\leqslant0$，即 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$t(x)<t(0)=0$，即 $\sin x<x$，则 $h(x)=\ln(x+1)-2x+\sin x<0$，即 $h(x)$ 恰有一个零点，符合题意；…………………………………… 9 分

若 $a>2$，当 $-1<x<0$ 时，由上知 $h'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，又 $-1<\dfrac{1}{a}-1<0$，$h'\left(\dfrac{1}{a}-1\right)=\cos\left(\dfrac{1}{a}-1\right)>0$，$h'(0)=2-a<0$，则存在 $x_1\in\left(\dfrac{1}{a}-1,0\right)$，使得 $h'(x_1)=0$，即 $h(x)$ 在 $(-1,x_1)$ 上单调递增，在 $(x_1,0)$ 上单调递减，所以 $h(x_1)>h(0)=0$，当 $-1<x<0$ 时，$h(x)=\ln(x+1)-ax+\sin x<\ln(x+1)+a+1$，所以当 $-1<x<-1+e^{-a-1}$ 且 $-1<x<x_1$ 时，$h(x)<\ln(-1+e^{-a-1}+1)+a+1=0$，所以 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 存在 1 个零点，不合题意. ……………………………………………… 11 分

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup\{2\}$. ……………………………………………………