数学参考答案及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	B	D	D	C	B	C	BCD	ACD	AC	AC

1.C **解析**：∵ $\complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,3]$，∴ $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap\mathbf{N}=\{0,1,2,3\}$，故选 C.

[命题意图] 该试题考查集合的补集与交集运算，数学能力思维方面主要考查运算思维与抽象思维.

2.B **解析**：由题得，$a_2=a_1q=3$，$a_3-a_1=a_1q^2-a_1=\frac{5}{2}$，联立可得 $q=\frac{3}{2}$ 或 $q=-\frac{2}{3}$（舍），故选 B.

[命题意图] 该试题考查等比数列的运算，是高考常考点，数学能力思维方面主要考查运算思维、变换思维、方程思想等.

3.B **解析**：由题知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，∵ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-5.5<0$，$f(1)=-2<0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=3^{\frac{3}{2}}-4.5$，又 $3^3-4.5^2>0$，∴ $f\left(\frac{3}{2}\right)>0$，故选 B.

[命题意图] 该试题考查零点存在定理和二分法，数学能力思维方面主要考查[illegible]思想.

4.D **解析**：由题得增速 $X\%=\frac{3\ 958-2\ 056}{2\ 056}\times100\%\approx92.5\%$，故选 D.

[命题意图] 该试题考查统计知识，是高考热点，数学能力思维方面主要考查[illegible].

5.D **解析**：对于 A，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$，A 不正确；对于 B，$f(0)=0$，B 不正确；对于 C，结合题中图象，$f(4)=\frac{64}{25}>f(3)=\frac{27}{16}>f(2)=\frac{8}{9}$，C 不正确，故选 D.

[命题意图] 该试题考查函数的图象及其性质，是高考常考点，数学能力思维方面主要考查特值思想与数形结合思想.

6.C **解析**：设 $|PF_1|=m(m>a)$，则 $|PF_2|=2a-m$，由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $2c=\sqrt{3}a$，由余弦定理得 $3a^2=m^2+(2a-m)^2+\frac{2}{3}m(2a-m)$，解得 $m=\frac{3}{2}a$ 或 $m=\frac{a}{2}$（舍），则 $\left(x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+y_0^2=\frac{9}{4}a^2$，联立椭圆方程解得 $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，故选 C.

[命题意图] 该试题考查椭圆的定义与性质，是高考必考点，数学能力思维方面主要考查静态思维与迁移思维.

7.B **解析**：令 $x=y=1$，得 $f(2)=f(2)+f(2)$，∴ $f(2)=0$；令 $x=y=-1$，得 $f(2)=2f(0)=0$，∴ $f(0)=0$；令 $y=-1$，得 $f(1-x)=f(x+1)+f(0)=f(1+x)$，∴ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=$

1 对称，故选 B.

[命题意图] 该试题考查抽象函数的性质，是高考常考点，数学能力思维方面主要考查赋值思维与抽象思维.

8. C　解析：设球心到底面的距离为 x，则 $h=R+x$，$a=\sqrt{2}\cdot\sqrt{R^2-x^2}$，$\therefore V=\frac{2}{3}(R+x)^2(R-x)$，则 $V=\frac{1}{3}(R+x)(R+x)(2R-2x)\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{R+x+R+x+2R-2x}{3}\right)^3$，当且仅当 $R+x=2R-2x$，即 $x=\frac{R}{3}$ 时取等号，此时 $h=\frac{4R}{3}$，$a=\frac{4R}{3}$，即 $h=a$，故选 C.

[命题意图] 该试题考查球内接正棱锥的最值问题，是高考的常考点，数学能力思维方面主要考查建模思维与化归思维.

9. BCD　解析：根据函数性质可得 A 错误，B 正确；对于 C，$f'(x)=\frac{1}{x}$，在 $x=e$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{e}$，切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$，即 $x=ey$，显然过原点，C 正确；当 $a=e$ 时，$y=f(x)$ 的图象与 $y=a^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，D 正确，故选 BCD.

[命题意图] 该试题考查函数的奇偶性、单调性、导数的几何意义以及反函数等，数学能力思维方面主要考查运算思维和数形结合思维.

10. ACD　解析：满足事件 A_1 的有(1,4)，(2,3)，(3,2)，(4,1)共四种情形，其概率 $P(A_1)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$，A 正确；满足事件 A_2 的有(1,1)，(2,1)共两种情形，其概率 $P(A_2)=\frac{1}{18}$，B 不正确；$P(A_3)=\frac{1}{2}$，满足事件 A_1A_3 的有(1,4)，(3,2)共两种情形，$P(A_1A_3)=\frac{1}{18}=P(A_1)P(A_3)$，C 正确；满足事件 A_2A_3 的只有(1,1)一种情形，$P(A_2A_3)=\frac{1}{36}=P(A_2)P(A_3)$，D 正确，故选 ACD.

[命题意图] 该试题考查古典概型以及事件的相互独立性，是高考常考点之一，数学能力思维方面主要考查分类思维和运算思维.

11. AC　解析：由复数模的几何意义知 A 正确；由椭圆的定义知 $2a>|F_1F_2|$，但 $2=|z_0-\bar{z}_0|$，故 B 不正确；同理由双曲线的定义知 C 正确；对于 D，由复数的几何意义知 z 在复平面内对应点到两定点的距离相等，轨迹是直线，故 D 不正确，故选 AC.

[命题意图] 该试题考查复数模的几何意义、共轭复数等，是高考必考点，数学能力思维方面主要考查跳跃思维与认知思维.

12. AC　解析：对于 A，显然正确；对于 B，令 $x_1=-1$，$x_2=2$，则 $e_+^{x_1}\cdot e_+^{x_2}=e^2$，$e_+^{x_1+x_2}=e$，错误；同理 D 也错误；对于 C，当 $x<0$ 时，$\ln(e_+^x+1)-\frac{x}{2}=\ln 2-\frac{x}{2}>\ln 2$，成立，当 $x\geqslant 0$ 时，$\ln(e_+^x+1)-\frac{x}{2}=\ln(e^x+1)-\ln e^{\frac{x}{2}}=\ln(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})\geqslant\ln 2$，正确，故选 AC.

[命题意图] 该试题考查新情境、新定义下的数学知识的应用，是高考热点题目，数学能力思维方面主要考查创新思维和探索思维.

13. $-\frac{7}{9}$ **解析**：由已知得 $6\cos^2\theta-3-14\cos\theta+7=0$，解得 $\cos\theta=\frac{1}{3}$ 或 $\cos\theta=2$（舍），故 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\frac{7}{9}$.

【命题意图】该试题考查倍角公式以及一元二次方程，是高考常考点，数学能力思维方面主要考查方程思想和运算思想.

14. 54 **解析**：由题得选派方法共有 $(C_2^2C_3^1+C_2^1C_3^2)A_3^3=54$ 种.

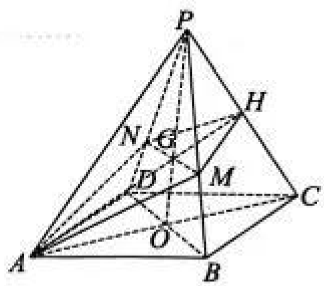
【命题意图】该试题考查排列组合知识，数学能力思维方面主要考查分类思想和抽象思维.

15. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ **解析**：延长 F_2H 交 F_1P 于点 Q，则 $|F_2Q|=b$，∵ $\angle F_1PF_2=60^\circ$，∴ $|PF_2|=|PQ|=b$，则 $|F_1Q|=2a$，$\angle F_1QF_2=120^\circ$，在 $\triangle F_1QF_2$ 中，由余弦定理得 $4c^2=4a^2+b^2+2ab$，即 $2a=3b$，则 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

【命题意图】该试题考查双曲线的定义与性质、余弦定理，数学能力思维方面主要考查方程思想和拓展思维.

16. $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ **解析**：如图，连接 BD，交 AC 于点 O，平面 AMN 交 PC 于点 H，交 PO 于点 G，∵ $PM=2MB$，$PN=2ND$，∴ $PG=2GO$，即点 G 是 $\triangle PBD$ 的重心，也是 $\triangle PAC$ 的重心，∴ H 是 PC 的中点，∴ $PC\perp AH$，∵ $PC\perp BD$，∴ $PC\perp MN$，又 $AH\cap MN=G$，∴ $PC\perp$ 平面 $AMHN$，故 $V_{P-AMHN}=\frac{1}{3}\cdot PH\cdot\frac{1}{2}\cdot AH\cdot MN=\frac{4\sqrt{6}}{9}$.

【命题意图】该试题考查[illegible]，数学能力思维方面主要考查空间想象及逻辑推理.



17. **解**：(1) 当 $n=1$ 时，$4S_1=a_1+a_2+1$，即 $2a_1=d+1$，……（2分）

∴ $a_n=a_1+(n-1)d=\frac{1}{2}(d+1)+(n-1)d$，即 $2a_n+d=2nd+1$. ……（4分）

(2) ∵ $a_3=8$，∴ $16+d=6d+1$，解得 $d=3$，∴ $a_n=3n-1$，……（6分）

∴ $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$，……（8分）

∴ $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{n}{2(3n+2)}$. …………………………………………………………………………………………（10分）

[命题意图] 该试题考查数列的性质、等差数列的定义与性质、裂项求和等，数学能力思维方面主要考查变换思维和跳跃思维.

18. **解**：(1)如图，过点 C 向 x 轴引垂线交于点 D，

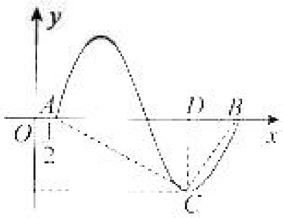
由正弦曲线的性质知 $AD=3DB$，

由射影定理知 $CD^2=AD\cdot DB$，而 $CD=\sqrt{3}$，$\therefore 3=3DB\cdot DB$，

$\therefore DB=1$，…………………………………………………………………………………………（3分）

$\therefore T=4=\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=\frac{\pi}{2}$. ……………………………………………………………………（4分）

由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，得 $\frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$. ……………………………………（6分）



(2)由(1)知 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$\therefore f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$. ……………………………（8分）

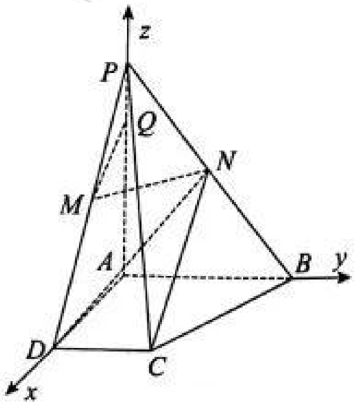
令 $f'(x)=\frac{\sqrt{6}\pi}{4}$，$\therefore\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore x=4k$ 或 $x=4k+1(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore$ 其切点坐标为 $\left(4k,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 或 $\left(4k+1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$. ……………………………………………（12分）

[命题意图] 该试题考查三角函数的图象与性质、射影定理、导数的几何意义等，数学能力思维方面主要考查探索思维和拓展思维.

19. **解**：(1)建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$B(0,2,0)$，$P(0,0,2)$.



当 $\lambda=1$ 时，$M\left(\frac{1}{2},0,1\right)$，$N(0,1,1)$，

则 $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$，$\overrightarrow{DN}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{CN}=(-1,0,1)$. ……（3分）

设平面 MDN 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，平面 DNC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

$\therefore -\frac{1}{2}x+y=0$ 且 $-x+y+z=0$，$-a+c=0$ 且 $-a+b+c=0$，令 $y=1,a=1$，

则 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$，$\boldsymbol{n}=(1,0,1)$，……（5分）

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ 平面 MDN 与平面 DNC 的夹角大小为 30°. ……（7分）

(2)证明：设 $M(x',y',z')$，由 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，得 $(x'-1,y',z')=\lambda(-x',-y',2-z')$，

$\therefore M\left(\frac{1}{1+\lambda},0,\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$，

同理由 $\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{QP}$，得 $Q\left(0,0,\frac{2\mu}{1+\mu}\right)$，$\therefore \overrightarrow{MQ}=\left(-\frac{1}{1+\lambda},0,\frac{2\mu}{1+\mu}-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$. ……（9分）

$\overrightarrow{PB}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(1,-1,0)$，设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{p}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\therefore 2y_1-2z_1=0$ 且 $x_1-y_1=0$，令 $x_1=1$，则 $\boldsymbol{p}=(1,1,1)$. ……（11分）

$\therefore \boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，则 $-\frac{1}{1+\lambda}+\frac{2\mu}{1+\mu}-\frac{2\lambda}{1+\lambda}=0$，即 $\mu=1+2\lambda$. ……（12分）

[命题意图] 该试题考查空间向量中的求夹角，线面平行等问题，是高考必考点，数学能力思维方面主要考查创新思维和数形结合思想.

20. 解：(1)证明：要证 $x+1\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{1-x}$，即证 $x+1\leqslant e^x\leqslant\frac{1}{1-x}$，

设 $h(x)=e^x-x-1$，$\therefore h'(x)=e^x-1$，……（1分）

由 $h'(x)>0$，得 $x>0$；由 $h'(x)<0$，得 $x<0$. ……（2分）

$\therefore h(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值，即 $h(x)\geqslant h(0)=0$，$\therefore e^x\geqslant x+1$. ……（4分）

当 $x\in[0,1)$ 时，$\because e^x\geqslant x+1$，用 $-x$ 代替 x，得 $e^{-x}\geqslant 1-x>0$，

$\therefore e^x\leqslant\frac{1}{1-x}$，结论成立，

$\therefore$ 不等式 $x+1\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{1-x}$ 成立. ……（6分）

(2)$\because f(2x)=e^{2x}$，由题即证 $e^x(1-x)$ 与 $e^{-x}(1+x)$ 的大小，

令 $g(x)=e^x(1-x)-e^{-x}(1+x)$，$\therefore g'(x)=x(e^{-x}-e^x)$，……（9分）

当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$e^{-x}-e^x\leqslant 0$，$\therefore g(x)$ 单调递减，

$\because g(0)=0$，$\therefore g(x)\leqslant 0$，即 $e^x(1-x)\leqslant e^{-x}(1+x)$，即有 $e^{2x}\leqslant\frac{1+x}{1-x}$，得证. ……（12分）

[命题意图] 该试题考查利用导数证明不等式，是高考必考点，数学能力思维方面主要考查构造思想和等价变换.

21. 解：(1)由已知得 $m^2=2p$，且 $\left(1+\frac{p}{2}\right)^2+m^2=2\left(1+\frac{p}{2}\right)^2$，……（2分）

解得 $p=2$，$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ……（4分）

(2)由(1)知 $P(1,2)$，设圆 $E:(x+1)^2+y^2=r^2$ 过点 P 的切线方程为 $y-2=k(x-1)$，

设两条切线的斜率分别为 k_1,k_2，$\therefore r=\dfrac{|2-2k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

整理得 $(4-r^2)k^2-8k+4-r^2=0$，$\therefore k_1k_2=1$. …………………………………… (7分)

设直线 AB 方程为 $y=tx+n$，代入 C 的方程整理得 $ty^2-4y+4n=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\therefore y_1+y_2=\dfrac{4}{t}$，$y_1y_2=\dfrac{4n}{t}$，

$\therefore k_1k_2=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2-2}{x_2-1}=\dfrac{16}{(y_1+2)(y_2+2)}=1$，$\therefore \dfrac{4n}{t}+\dfrac{8}{t}+4=16$，即 $n=3t-2$， ………… (11分)

$\therefore$ 直线 AB 方程为 $y+2=t(x+3)$，恒过点 $(-3,-2)$. …………………………………… (12分)

[命题意图] 本试题考查抛物线的方程及其性质、点与圆的位置、直线与圆锥曲线的位置关系等，是高考必考内容. [illegible]

22. 解：(1) $p_1=1$，$p_2=\dfrac{1}{3}$，$p_3=\dfrac{1}{3}p_2+\dfrac{2}{3}(1-p_2)=\dfrac{5}{9}$. …………………………………… (2分)

(2)由已知 $p_n=\dfrac{1}{3}p_{n-1}+\dfrac{2}{3}(1-p_{n-1})$，$\therefore p_n=-\dfrac{1}{3}p_{n-1}+\dfrac{2}{3}$，即 $p_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$，

$\therefore \left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ 是以 $-\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列. …………………………………… (5分)

$\therefore p_n-\dfrac{1}{2}=\left(p_1-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，$\therefore p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$. …………………………………… (6分)

(3) $q_n=|2p_n-1|=\dfrac{1}{3^{n-1}}\in(0,1]$.

设 $h(x)=x-\sin x$，$x\in(0,1]$，$\therefore h'(x)=1-\cos x>0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增， ……… (8分)

显然 $q_n>q_{n+1}$，则 $h(q_n)>h(q_{n+1})$，

$\therefore q_n-\sin q_n>q_{n+1}-\sin q_{n+1}$，则 $\dfrac{2}{3^n}=q_n-q_{n+1}>\sin q_n-\sin q_{n+1}$， ……………………………… (10分)

即 $(q_{n+1}-q_n)(\sin q_{n+1}-\sin q_n)=(q_n-q_{n+1})(\sin q_n-\sin q_{n+1})<\dfrac{4}{9^n}$，

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}(q_{i+1}-q_i)(\sin q_{i+1}-\sin q_i)<\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{9^n}}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{9^n}\right)<\dfrac{1}{2}$. ……………………………

关于我们

务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线