绝密★启用前

辽宁省名校联盟2023年高三12月份联合考试

数学

命题人:辽宁名校联盟试题研发中心　审题人:辽宁名校联盟试题研发中心

考号＿＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿

本试卷满分150分,考试时间120分钟.

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x|3x^2-17x\leqslant 0\}$, $N=\{x\in\mathbf{Z}|-2\leqslant x<4\}$, 则 $M\cap N=$

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3\}$

2. 若复数 $\frac{2-mi}{i}+5-i$ 为纯虚数,则 $m=$

A. 5　　B. -5　　C. 3　　D. -3

3. 已知函数 $f(x)=2x^2+ax$,则"$f(x)$在区间$[1,2]$上单调递增"的一个充分不必要条件为

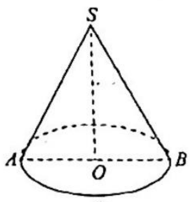
A. $a\leqslant -4$　　B. $a<0$　　C. $a>-5$　　D. $a>4$

4. 老张为锻炼身体,增强体质,计划从下个月1号开始慢跑,第一天跑步3公里,以后每天跑步比前一天增加的距离相同.若老张打算用20天跑完98公里,则预计这20天中老张日跑步量超过5公里的天数为

A. 8　　B. 9　　C. 13　　D. 14

5. 如图①所示,圆锥绣球是虎耳草科绣球属植物,在中国主要分布于西北、华东、华南、西南等地区,抗虫害能力强,其花序硕大,类似于圆锥形,因此得名.现将某圆锥绣球近似看作如图②所示的圆锥模型,已知 $SA=\sqrt{5}$ dm,直线 SA 与圆锥底面所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,则该圆锥的侧面积为

①



②

A. 3π dm^2　　B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}\pi$ dm^2　　C. $\sqrt{5}\pi$ dm^2　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$ dm^2

6. 将函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4\omega}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图像,若函数 $y=g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增,则 ω 的最大值为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. 3

1
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

7. 已知直线 $l: x-y+2=0$ 与圆 $O: x^2+y^2=1$，过直线 l 上的任意一点 P 作圆 O 的切线 PA，PB，切点分别为 A，B，则 $\sin\angle AOB$ 的最大值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

8. 已知在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，点 P，Q，T 分别在棱 BB_1，CC_1 和 AB 上，且 $B_1P=3$，$C_1Q=1$，$BT=3$，记平面 PQT 与侧面 ADD_1A_1，底面 $ABCD$ 的交线分别为 m，n，则

A. m 的长度为 $\frac{5\sqrt{5}}{3}$　　B. m 的长度为 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

C. n 的长度为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. n 的长度为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n，$a_4=2$，$a_6=8$，则

A. $q=2$　　B. $a_{10}=256$

C. 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是递减数列　　D. $S_n=2^{n-1}-\frac{1}{4}$

10. 已知函数 $f(x)=2x^3-6x+1$，则

A. $g(x)=f(x)-1$ 为奇函数

B. $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,1)$

C. $f(x)$ 的极小值为 -3

D. 若关于 x 的方程 $f(x)-m=0$ 恰有 3 个不等的实根，则 m 的取值范围为 $(-3,5)$

11. 已知正数 x，y 满足 $x^2+xy+y^2=9$，则

A. $xy\leqslant 2$　　B. $x^2+y^2\geqslant 6$　　C. $x+y\leqslant 2\sqrt{3}$　　D. $x+y\geqslant 6$

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，左、右顶点分别为 M_1，M_2，离心率为 e，点 $A(x_0,y_0)$ 在 C 上，则

A. 若 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $3b^2$，则 $\tan\angle F_1AF_2=\frac{3}{4}$

B. 若直线 AM_1，AM_2 的斜率之积为 λ，则 $e^2-\lambda=1$

C. 若 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则以 F_1F_2 为直径的圆 O 与 C 无交点

D. 若 $|AF_1|\leqslant 2b$，则 e 的最大值为 $\frac{3}{5}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，$\boldsymbol{c}=(\lambda,3)$，若 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，则 $\lambda=$________.

14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 的图像是一条连续不断的曲线，则同时满足下列三个条件的一个 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=$________.

①$\forall m,n\in\mathbf{R}$，$f(m+n)=f(m)+f(n)$；②$f(x)$ 为奇函数；③$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

15. 已知在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$AB=AC$，若直三棱柱存在内切球（与各面均相切）且该球的表面积为 16π，则该直三棱柱的体积为________.

16. 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，直线 l 过点 F 且与 C 交于 P，Q 两点，且 $|PQ|=\frac{32}{15}$，$\triangle OPF$ 与 $\triangle OQF$ 的面积之比为 $\frac{5}{3}$，其中 O 为坐标原点，则 $p=$________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-2$.

(1)求证：$\{a_n-2\}$为等比数列；

(2)求数列$\{na_n\}$的前 n 项和 S_n.

18.（12 分）

已知$\triangle ABC$的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $2c(\sin C-\sin A\cos B)-b\sin C=0$.

(1)求 A；

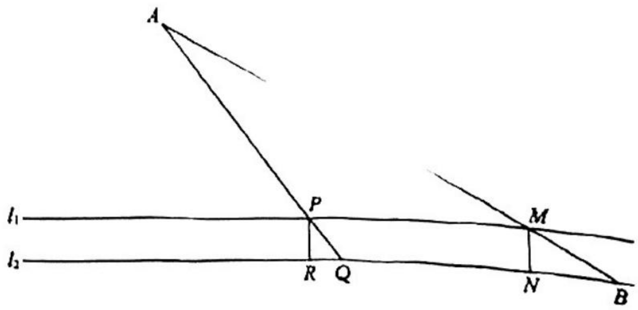
(2)若 $a=2\sqrt{3}$，求 $b+2c$ 的最大值.

19.（12 分）

如图，相距 10 m 的 l_1，l_2 之间是一条马路（l_1，l_2 可近似看作两条平行直线），为了测量河对岸一点 A 到马路一侧 l_2 的距离 h，小明在 l_1 这一侧东边选择了一点 B，作为测量的初始位置，其中 AB 与 l_1 交于点 M，现从点 B 出发沿着 l_2 向西走 15 m 到达点 N，测得 $MN\perp l_2$，继续向西走 300 m 到达点 Q，其中 AQ 与 l_1 交于点 P，继续向西走 5 m 到达点 R，测得 $PR\perp l_2$. 根据上述测量数据，完成下列问题.

(1)求 $\sin\angle BAQ$ 的值；

(2)求 h 的值.

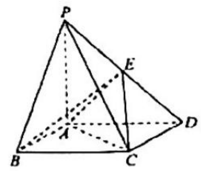


20.(12分)

如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,已知 $PA\perp AD$,底面 $ABCD$ 是正方形,E 为棱 PD 的中点,$PA=AD=2$,$PC=2\sqrt{3}$.

(1)求点 B 到平面 ACE 的距离;

(2)求平面 PAC 与平面 ACE 夹角的余弦值.



21.(12分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2,点 $P\left(3,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 在 C 上,且 $2|A_2P|=3$.

(1)求 C 的方程;

(2)直线 $l:y=kx+1$ 与 C 交于 M,N 两点,记直线 A_1M,A_2N 的斜率分别为 k_1,k_2,若 $k_1+5k_2=0$,求 k 的值.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{ax}{x+1}$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$ 的极值;

(2)若 $f(x)\geqslant 0$,求 a 的值;

(3)求证:$\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\ln 2(n\in\mathbf{N}^*)$.

参考答案及解析

一、选择题

1. C 【解析】由题意得 $M=\left\{x \middle| 0\leqslant x\leqslant \frac{17}{3}\right\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，故 $M\cap N=\{0,1,2,3\}$. 故选 C 项.

2. A 【解析】$\frac{2-mi}{i}+5-i=-2i-m+5-i=5-m-3i$，故 $5-m=0$，解得 $m=5$. 故选 A 项.

3. D 【解析】$f(x)=2x^2+ax$ 图像的对称轴为直线 $x=-\frac{a}{4}$，若 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增，则 $-\frac{a}{4}\leqslant 1$，解得 $a\geqslant -4$，所以“$a>4$”是“$a\geqslant -4$”的充分不必要条件. 故选 D 项.

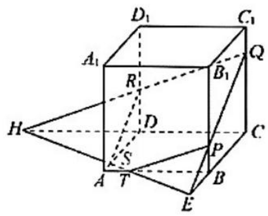
4. B 【解析】由题意得这 20 天日跑步量为等差数列，记为 $\{a_n\}$，设公差为 d，则 $20\times 3+\frac{1}{2}\times 20\times 19d=98$，解得 $d=\frac{1}{5}$，所以 $a_n=3+(n-1)\times\frac{1}{5}=\frac{n}{5}+\frac{14}{5}$. 由 $a_n>5$，得 $\frac{n}{5}+\frac{14}{5}>5$，所以 $n>11$，所以老张日跑步量超过 5 公里的天数为 9 天. 故选 B 项.

5. C 【解析】设 $AO=r$，则由题意得 $\frac{r}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，解得 $r=1$，所以底面圆周长 $l=2\pi$，故该圆锥的侧面积 $S=\frac{1}{2}l\cdot SA=\frac{1}{2}\times 2\pi\times\sqrt{5}=\sqrt{5}\pi\ \mathrm{dm}^2$. 故选 C 项.

6. B 【解析】因为 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4\omega}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图像，所以 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4\omega}\right)=\cos\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{4\omega}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\omega x$. 当 $x\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ 时，$\omega x\in\left[0,\frac{3\omega\pi}{4}\right]$，因为函数 $y=g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增，所以 $\frac{3\omega\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$，因此 ω 的最大值为 $\frac{2}{3}$. 故选 B 项.

7. D 【解析】设 $\angle AOB=\theta$，由题意得 $\frac{\theta}{2}$ 为锐角，因为圆 O 的半径 $r=1$，所以 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{|OP|}$，$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{2}{|OP|^2}-1$，故当 $|OP|$ 取最小值时，$\cos\theta$ 取最大值，显然当 $OP\perp l$ 时，$|OP|$ 最小，且 $|OP|_{\min}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，此时 $(\cos\theta)_{\max}=\frac{2}{2}-1=0$，此时 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\sin\theta$ 也取得最大值，最大值为 $\sin\frac{\pi}{2}=1$. 故选 D 项.

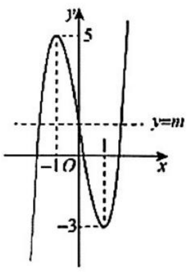
8. A 【解析】如图，连接 QP 并延长交 CB 的延长线于 E，连接 ET 并延长交 AD 于点 S，交 CD 的延长线于点 H，连接 HQ，交 DD_1 于点 R，连接 SR，则 m 即为 SR，n 即为 ST. 由 $PB\,/\!/\,QC$，得 $\frac{PB}{QC}=\frac{EB}{EB+4}=\frac{1}{3}$，所以 $EB=2$，$EC=6$，由 $AS\,/\!/\,EB$，得 $\frac{AS}{EB}=\frac{AT}{TB}=\frac{1}{3}$，所以 $AS=\frac{1}{3}EB=\frac{2}{3}$，所以 $n=ST=\sqrt{AS^2+AT^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$，故 C，D 项错误；由 $SD\,/\!/\,EC$，得 $\frac{SD}{EC}=\frac{HS}{HE}=\frac{5}{9}$，又易知 $SR\,/\!/\,PQ$，所以 $\frac{SR}{QE}=\frac{HS}{HE}$，所以 $\frac{SR}{QE}=\frac{5}{9}$，所以 $SR=\frac{5}{9}QE=\frac{5}{9}\sqrt{QC^2+EC^2}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$，故 A 项正确，B 项错误. 故选 A 项.



二、选择题

9. AC 【解析】由 $\frac{a_6}{a_4}=q^2=4$，得 $q=2$ 或 $q=-2$（舍去），A 项正确；因为 $a_n=a_4q^{n-4}=2\times 2^{n-4}=2^{n-3}$，所以 $a_{10}=2^7=128$，B 项错误；$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^{n-3}}$，随着 n 的增大而减小，故 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是递减数列，C 项正确；$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2^{-2}(1-2^n)}{1-2}=2^{n-2}-\frac{1}{4}$，D 项错误. 故选 AC 项.

10. ACD 【解析】对于A项，$g(x)=f(x)-1=2x^3-6x$，所以 $g(-x)=-2x^3+6x=-g(x)$，故A项正确；对于B项，$f'(x)=6(x-1)(x+1)$，令 $f'(x)>0$ 可得 $x<-1$ 或 $x>1$，令 $f'(x)<0$ 可得 $-1<x<1$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$，故B项错误；对于C项，由 $f'(x)=6(x+1)(x-1)=0$，得 $x=\pm1$，结合B项可知，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，此时 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=-3$，故C项正确；对于D项，令 $f(x)-m=0$，得 $f(x)=m$，如图，在同一直角坐标系内作出 $f(x)$ 的图像与直线 $y=m$，当关于 x 的方程 $f(x)-m=0$ 恰有3个不等的实根时，$-3<m<5$，D项正确. 故选ACD项.



11. BC 【解析】对于A项，由已知得 $9-xy=x^2+y^2\geqslant 2xy$，所以 $xy\leqslant3$（当且仅当 $x=y$ 时取等号），A项错误；对于B项，由已知得 $9-(x^2+y^2)=xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $x^2+y^2\geqslant6$（当且仅当 $x=y$ 时取等号），B项正确；对于C项，由已知得 $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=9$，所以 $(x+y)^2-9=xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，即 $\frac{3}{4}(x+y)^2\leqslant9$，所以 $x+y\leqslant2\sqrt{3}$（当且仅当 $x=y$ 时取等号），C项正确，D项错误. 故选BC项.

12. BCD 【解析】由 $S_{\triangle AF_1F_2}=b^2\tan\frac{\angle F_1AF_2}{2}=3b^2$，得 $\tan\frac{\angle F_1AF_2}{2}=3$，所以 $\tan\angle F_1AF_2=\frac{2\times3}{1-3^2}=-\frac{3}{4}$，故A项错误；由题意得 $M_1(-a,0)$，$M_2(a,0)$，所以 $k_{AM_1}\cdot k_{AM_2}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}=\lambda$，$e^2-1=\frac{c^2}{a^2}-1=\frac{c^2-a^2}{a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$，故 $e^2-\lambda=1$，故B项正确；若 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $a=\sqrt{3}c$，$b=\sqrt{2}c>c$，故C项正确；由 $|AF_1|\leqslant2b$，得 $a+c\leqslant2b\Rightarrow a^2+c^2+2ac\leqslant4a^2-4c^2\Rightarrow5e^2+2e-3\leqslant0\Rightarrow0<e\leqslant\frac{3}{5}$，故D项正确. 故选BCD项.

三、填空题

13. 4 【解析】依题意，$2a+b=(4,-6)+(-1,2)=(3,-4)$，故 $(2a+b)\cdot c=3\lambda-12=0$，解得 $\lambda=4$.

14. $-x$（答案不唯一）【解析】由题意得满足条件的一个 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=-x$.

15. $48+32\sqrt{2}$ 【解析】依题意设内切球的半径为 r，则 $4\pi r^2=16\pi$，解得 $r=2$. 设 $AB=a$，则 $AC=a$，$BC=\sqrt{2}a$，由△ABC 的内切圆半径为2，得 $\frac{a+a-\sqrt{2}a}{2}=2$，所以 $a=4+2\sqrt{2}$，故该直三棱柱的体积 $V=\frac{1}{2}\times(4+2\sqrt{2})\times(4+2\sqrt{2})\times4=48+32\sqrt{2}$.

16. 1 【解析】由对称性，不妨设 P,Q 分别在第一、四象限，直线 l 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}$，联立 $\begin{cases}y^2=2px,\\x=my+\frac{p}{2},\end{cases}$ 整理得 $y^2-2pmy-p^2=0$. 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，其中 $y_1>0$，$y_2<0$，则 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$，由△OPF 与△OQF 的面积之比为 $\frac{5}{3}$，可得 $\frac{y_1}{y_2}=-\frac{5}{3}$，则 $y_1=\frac{\sqrt{15}}{3}p$，$y_2=-\frac{\sqrt{15}}{5}p$，则 $\frac{2\sqrt{15}}{15}p=2pm$，得 $m=\frac{\sqrt{15}}{15}$，则 $|PQ|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\frac{4\sqrt{15}}{15}\times\frac{8\sqrt{15}}{15}p=\frac{32}{15}$，解得 $p=1$.

四、解答题

17.（1）证明：由 $a_{n+1}=2a_n-2$，

得 $a_{n+1}-2=2a_n-4=2(a_n-2)$，　　（2分）

又 $a_1-2=1$，　　（3分）

所以 $\{a_n-2\}$ 是以1为首项，2为公比的等比数列.　　（4分）

（2）解：由（1）知 $a_n-2=2^{n-1}$，故 $a_n=2+2^{n-1}$，　　（5分）

则 $na_n=2n+n\times2^{n-1}$.　　（6分）

设 $T_n=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\cdots+n\times2^{n-1}$，

$2T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，

两式相减得 $-T_n=1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\times2^n=2^n-1-n\times2^n$.　　（8分）

所以 $T_n=(n-1)2^n+1$，　　（9分）

自主选拔在线
www.zizzs.com
专注中学拔尖人才培养

故 $S_n=2(1+2+3+\cdots+n)+T_n=2\times\frac{n(n+1)}{2}+T_n=n(n+1)+(n-1)2^n+1$. (10分)

18. 解：(1)由正弦定理得 $2(\sin^2C-\sin A\cdot\cos B\sin C)-\sin B\sin C=0$, (1分)

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C\neq0$,

所以 $2\sin C-2\sin A\cos B-\sin B=0$,

所以 $2\sin(A+B)-2\sin A\cos B-\sin B=0$,

所以 $2\cos A\sin B=\sin B$. (3分)

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $\sin B\neq0$,

所以 $2\cos A=1$,即 $\cos A=\frac{1}{2}$. (5分)

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. (6分)

(2)由正弦定理得 $b+2c=\frac{a}{\sin A}(\sin B+2\sin C)=4(\sin B+2\sin C)=4\left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)+2\sin C\right]=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C+2\sin C\right)=2\sqrt{3}\cos C+10\sin C=4\sqrt{7}\sin(C+\varphi)$,其中 φ 为锐角,$\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{5}$. (10分)

因为 $0<C<\frac{2\pi}{3}$,所以 $\varphi<C+\varphi<\frac{2\pi}{3}+\varphi$.

所以 $\sin(C+\varphi)$ 的最大值为1,

故 $b+2c$ 的最大值为 $4\sqrt{7}$. (12分)

19. 解：(1)由图可知,$MN=PR=10$ m,$BN=15$ m,$NQ=300$ m,$RQ=5$ m,

则 $\sin\angle MBN=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,$\cos\angle MBN=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\sin\angle PQR=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\angle PQR=\frac{\sqrt{5}}{5}$, (2分)

故 $\sin\angle BAQ=\sin(\angle PQR-\angle MBN)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{13}}{13}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$. (6分)

(2)在 $\triangle BAQ$ 中,由正弦定理得 $\frac{BQ}{\sin\angle BAQ}=\frac{AQ}{\sin\angle ABQ}$,

即 $\frac{315}{\frac{4\sqrt{65}}{65}}=\frac{AQ}{\frac{2\sqrt{13}}{13}}$,解得 $AQ=\frac{315\sqrt{5}}{2}$ m, (10分)

故 $h=AQ\cdot\sin\angle PQR=\frac{315\sqrt{5}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=315$ m. (12分)

20. 解：解法一：(1)因为四边形 $ABCD$ 为正方形,

所以 $AD=CD=2$,且 $\angle ADC=90°$,

所以 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2\sqrt{2}$,

所以 $AC^2+PA^2=(2\sqrt{2})^2+2^2=12=PC^2$,

所以 $PA\perp AC$. (1分)

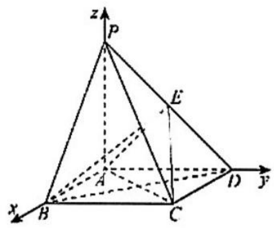
又 $PA\perp AD$,$AD\cap AC=A$,

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,

因为 $AB\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB$,

即 PA,AB,AD 两两垂直. (2分)

以 A 为原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,2,0)$,$E(0,1,1)$,$D(0,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{CE}=(-2,-1,1)$,$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{BE}=(-2,1,1)$. (4分)

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-2x-y+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2y=0,\end{cases}$

取 $x=1$,则 $y=-1$,$z=1$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$. (6分)

设点 B 到平面 ACE 的距离为 d,

则 $d=\frac{|\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2\times1+1\times(-1)+1\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

即点 B 到平面 ACE 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (8分)

(2)连接 BD,则 $BD\perp AC$.

由(1)得 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $BD\perp PA$,

又 $PA\cap AC=A$,所以 $BD\perp$ 平面 PAC,

即 $\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$ 为平面 PAC 的一个法向量. (10分)

设平面 PAC 与平面 ACE 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2\times1+2\times(-1)+0\times1|}{\sqrt{4+4+0}\times\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

即平面 PAC 与平面 ACE 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (12分)

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

解法二：(1)因为四边形 $ABCD$ 为正方形，

所以 $AD=CD=2$，且 $\angle ADC=90°$，

所以 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，

所以 $AC^2+PA^2=(2\sqrt{2})^2+2^2=12=PC^2$，

所以 $PA\perp AC$.　(1分)

又 $PA\perp AD$，$AD\cap AC=A$，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$，

又 $PA\cap AD=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

又 $AE\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AE$.　(2分)

因为 E 为 PD 的中点，所以 $AE\perp PD$，

又 $PD\cap CD=D$，所以 $AE\perp$ 平面 PCD.

又 $CE\subset$ 平面 PCD，所以 $AE\perp CE$.　(3分)

易知 $AE=\sqrt{2}$，则 $CE=\sqrt{6}$，

则 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{3}$.　(4分)

因为 E 为 PD 的中点，则 E 到平面 $ABCD$ 的距离为 P 到平面 $ABCD$ 距离的一半，即 1，　(5分)

设 B 到平面 ACE 的距离为 h，

由 $V_{三棱锥E\text{-}ABC}=V_{三棱锥B\text{-}ACE}$，得 $\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times 1=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ACE}\times h$，

即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 1=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times h$，

解得 $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

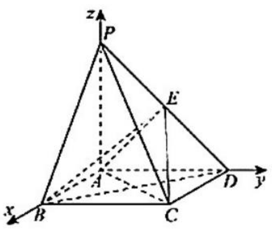
即点 B 到平面 ACE 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.　(6分)

(2)由(1)知，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$，

即 PA，AB，AD 两两垂直.

以 A 为原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$E(0,1,1)$，$D(0,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{CE}=(-2,-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,1,1)$.　(7分)

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-2x-y+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2y=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=-1$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.　(9分)

连接 BD，则 $BD\perp AC$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BD\perp PA$，

又 $PA\cap AC=A$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC，

即 $\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$ 为平面 PAC 的一个法向量.　(10分)

设平面 PAC 与平面 ACE 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2\times1+2\times(-1)+0\times1|}{\sqrt{4+4+0}\times\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即平面 PAC 与平面 ACE 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.　(12分)

21. 解：(1)由题意得 $A_2(a,0)$，$0<a<3$，

又 $|A_2P|=\sqrt{(3-a)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-0\right)^2}=\frac{3}{2}$，

解得 $a=2$ 或 $a=4$(舍)，所以 C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$.　(2分)

又点 $P\left(3,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 在 C 上，所以 $\frac{9}{4}-\frac{5}{4b^2}=1$，解得 $b^2=1$，　(3分)

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.　(4分)

(2)依题意，$A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2-4y^2-4=0,\end{cases}$ 整理得 $(1-4k^2)x^2-8kx-8=0$，其中 $1-4k^2\neq0$，$\Delta=32-64k^2>0$，　(6分)

则 $k^2<\frac{1}{2}$ 且 $k^2\neq\frac{1}{4}$，

$x_1+x_2=\frac{8k}{1-4k^2}$，$x_1x_2=-\frac{8}{1-4k^2}$，　(7分)

所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}$，

又 $\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$，则 $\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{x_1-2}{4y_1}$，　(9分)

代入可得 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{(x_2-2)(x_1-2)}{4y_1y_2}=\frac{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}{4k^2x_1x_2+4k(x_1+x_2)+4}=\frac{4k^2+4k+1}{4k^2-1}=-5$，

解得 $k=\frac{1}{3}$ 或 $k=-\frac{1}{2}$(舍去).　(12分)

22.(1)解：当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$，（1分）

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，（2分）

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值0，无极大值．（3分）

(2)解：由题得 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{a}{(x+1)^2}=\frac{x-(a-1)}{(x+1)^2}$．

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)<f(0)=0$ 与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾；（4分）

②当 $a>0$ 时，当 $x\in(-1,a-1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(a-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(a-1)=\ln a-(a-1)$．（5分）

因为 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $\ln a-(a-1)\geqslant 0$．

记 $g(a)=\ln a-(a-1)$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$，

当 $a\in(0,1)$ 时，$g'(a)>0$，$g(a)$ 单调递增，

当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 单调递减，

所以 $g(a)_{\max}=g(1)=0$，所以 $\ln a-(a-1)\leqslant 0$，（6分）

又 $\ln a-(a-1)\geqslant 0$，所以 $\ln a-(a-1)=0$，

所以 $a=1$．（7分）

(3)证明：先证 $\sin x<x(x>0)$，

设 $h(x)=\sin x-x(x>0)$，则 $h'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减，

所以 $h(x)<h(0)=0$，即 $\sin x<x$，

所以 $\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$．（9分）

再证 $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}$，

由(2)知 $\ln(x+1)\geqslant\frac{x}{x+1}$，当 $x=0$ 时等号成立．

令 $x=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)>\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}$，（10分）

即 $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$，

所以 $\frac{1}{n+2}<\ln(n+2)-\ln(n+1)$，

……

$\frac{1}{n+n}<\ln(2n)-\ln(2n-1)$，

累加得 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln(2n)-\ln n=\ln 2$，（11分）

所以 $\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\ln 2$．（12分）

辽宁省名校联盟2023年高三12月份联合考试

数学

题号	题型	分值	考查的主要内容及知识点	难度
1	选择题	5	集合的交集运算	易
2	选择题	5	复数的运算,由复数为纯虚数求参	易
3	选择题	5	单调性与充要性的结合	易
4	选择题	5	等差数列的实际应用	易
5	选择题	5	实际生活中的空间几何体(涉及锥体的侧面积)	易
6	选择题	5	三角函数图像的平移,由三角函数的性质求参	易
7	选择题	5	直线与圆相切	中
8	选择题	5	空间几何题的截面问题	中
9	选择题	5	等比数列的性质	易
10	选择题	5	利用导数研究函数的性质	易
11	选择题	5	基本不等式中的应用	中
12	选择题	5	椭圆定义与性质的综合	中
13	填空题	5	向量的坐标运算	易
14	填空题	5	与函数有关的开放题	易
15	填空题	5	球与几何体的内切问题	中
16	填空题	5	抛物线的焦点弦性质,不涉及向量	难
17	解答题	10	数列的证明,错位相减法求和	易
18	解答题	12	利用正余弦定理解三角形,利用三角函数式求最值	中
19	解答题	12	解三角形的实际应用	易
20	解答题	12	以锥体为载体,求点到面的距离,面面角	中
21	解答题	12	直线与双曲线的位置关系,定值问题	难
22	解答题	12	用导数研究函数的极值,由不等式恒成立求参,证明不等式	难

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。