2024届广州市高三年级调研测试
数学试题参考答案及评分标准

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	C	B	D	D	B	A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

题号	9	10	11	12
答案	AC	ACD	BC	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

题号	13	14	15	16
答案	$2\sqrt{2}$	120	36π	$\dfrac{e^2}{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算骤．

17.解：（1）因为 $S_n = 2a_n - 1$ ， ①

当 $n=1$ 时，$S_1 = 2a_1 - 1 = a_1$，则 $a_1 = 1$． ……………………1 分

当 $n \geq 2$ 时，$S_{n-1} = 2a_{n-1} - 1$， ② ……………………2 分

①−②得 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$，即 $a_n = 2a_{n-1} (n \geq 2)$， ……………3 分

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列． ……………………4 分

所以 $a_n = 2^{n-1}$． ……………………………………………5 分

（2）因为 $\log_2 a_n = \log_2 2^{n-1} = n-1$，所以 $b_n = \begin{cases} n-1, & n\text{为奇数}, \\ 2^{n-1}, & n\text{为偶数}. \end{cases}$ ……………………7 分

所以 $T_{2n} = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2n}$

$= (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n})$

$= (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n})$

$= [0 + 2 + \cdots + (2n-2)] + (2^1 + 2^3 + \cdots + 2^{2n-1})$

……………………7 分

$= \dfrac{(0+2n-2)\cdot n}{2} + \dfrac{2(1-4^n)}{1-4}$ ……………………9 分

$= n^2 - n + \dfrac{2(4^n - 1)}{3}$． ．…………………………10 分

18.解：(1)设点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 h，

则 $V_{B-PAD}=V_{P-ABD}=\dfrac{1}{3}h\cdot S_{\triangle ABD}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$， ....1 分

由题可知 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC=4$， ....2 分

所以 $h=\dfrac{3V_{P-ABD}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$， ....3 分

故 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{2}$． ....4 分

（2）取 AD 的中点 M，连接 PM，因为 $PA=PD$，所以 $PM\perp AD$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PM\subset$ 平面 PAD，$PM\perp AD$，所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$． ....5 分

由（1）知 $PM=\sqrt{2}$． ....6 分

由题意可得 $BD=2\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{(4-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

所以 $AD^2+BD^2=AB^2$，故 $AD\perp BD$．

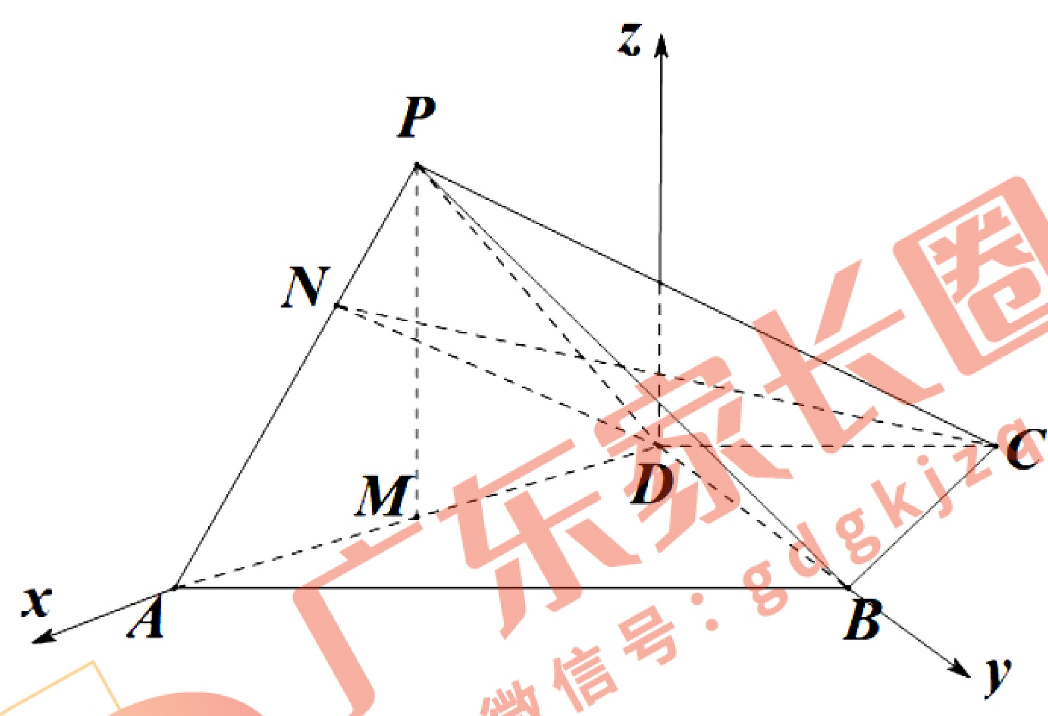
法一（坐标法）： 以 D 点为坐标原点，DA 为 x 轴，DB 为 y 轴，过 D 点作 PM 的平行线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 A（$2\sqrt{2},0,0$），P（$\sqrt{2},0,\sqrt{2}$），C（$-\sqrt{2},\sqrt{2},0$）． ....7 分

依题意 $\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AP}=\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},0,\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3},0,\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$． ....8 分

设平面 NCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，



则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DN}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0,\\ \dfrac{4\sqrt{2}}{3}x_1+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}z_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-2)$ ．......................10 分

又平面 $ABCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$

设平面 NCD 与平面 $ABCD$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\left|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>\right|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\bullet\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\left|\frac{-2}{\sqrt{6}\times1}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

即平面 NCD 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． ....12 分

法二（几何法）： 在线段 AM 上取点 H，使得 $AH=2HM$，连接 NH，过点 H 作 $HK\perp CD$，垂足为 K，连接 NK． ....7 分

因为 $AN=2NP$，所以 NH // PM，$NH=\dfrac{2}{3}PM=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， ....8 分

$AH=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{1}{3}AD=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

因为 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $NH\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $NH\perp CD$，

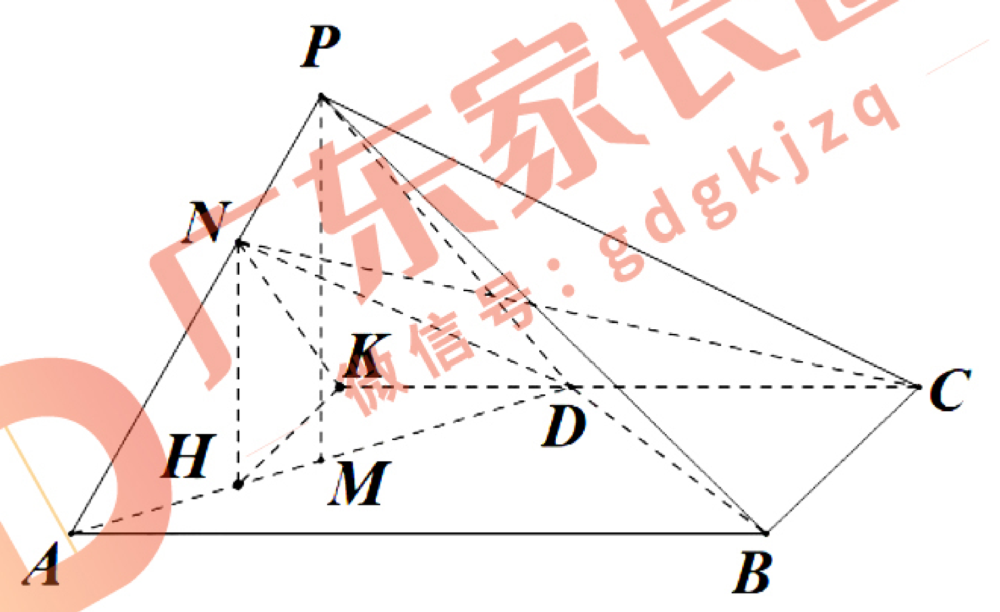
又 $HK\perp CD$，且 $HK\cap NH=H$，

所以 $CD\perp$ 平面 NHK， ......9 分

所以 $CD\perp NK$，

所以 $\angle NKH$ 是二面角 $N-CD-A$ 的平面角. ......10 分

在 $Rt\triangle HDK$ 中，易知 $HD=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，$\angle KDH=45°$，



所以 $KH=DH\cdot\sin 45°=\dfrac{4}{3}$，

所以 $\cos\angle NKH=\dfrac{HK}{NK}=\dfrac{\frac{4}{3}}{\sqrt{(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2+(\frac{4}{3})^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故平面 NCD 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ......12 分

19（1）证明：因为 $b\sin B+c\sin C-a\sin A=2b\sin B\sin C$，

由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=2bc\sin B$， ......1 分

又因为 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ......2 分

所以 $2bc\cos A=2bc\sin B$，即 $\cos A=\sin B$. ......3 分

又 $\cos A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)$，所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=\sin B$.

又 A，$B\in(0,\pi)$，

所以 $\dfrac{\pi}{2}-A=B$ 或 $\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)+B=\pi$. ......4 分

又 $C\neq\dfrac{\pi}{2}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{2}+A$. ......5 分

（2）解：由（1）知 $B=\dfrac{\pi}{2}+A$，$C=\pi-A-B=\pi-A-\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)=\dfrac{\pi}{2}-2A$. ......6 分

由 A，B，$C\in(0,\pi)$，解得 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$. ......7 分

所以 $\cos A+\sin B+\sin C=\cos A+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2A\right)$

$=\cos A+\cos A+\cos 2A$ ......8 分

$=2\cos A+2\cos^2 A-1$ ......9 分

$=2(\cos A+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{3}{2}$.

又 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以 $\cos A\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$， ......10 分

所以 $\cos A+\sin B+\sin C$ 的取值范围为 $(\sqrt{2},3)$. ......12 分

（别解：因为 $\cos A+\sin B+\sin C=2\cos A+\cos 2A$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，

所以 $\sqrt{2}<2\cos A+\cos 2A<3$，所以 $\cos A+\sin B+\sin C$ 的取值范围为 $(\sqrt{2},3)$. ）

20. 解（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=(x+2)\ln(x+1)$，$f(0)=0$，　　　　　　　　　　　　　　……………………1 分

$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x+2}{x+1}$，$f'(0)=2$，　　　　　　　　　　　　　　……………………3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x$．　　　　　　　　…………………4 分

（2）**法一：** $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x+2}{x+1}-a$，$f'(0)=2-a$，

记 $\varphi(x)=f'(x)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}<0,\ x\in(-1,0)$，…………………5 分

（备注：从逻辑推理的角度写成：$f''(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}<0$ 不扣分）

所以 $f'(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 单调递减.　　　　　　　　　　　　　　　　…………………6 分

（ⅰ）当 $a\le 2$ 时，$f'(x)>f'(0)=2-a\ge 0$，$x\in(-1,0)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，符合题意；

…………………8 分

（ⅱ）当 $a>2$ 时，$f'(0)=2-a<0$，$f'(-1+e^{-a})=-a+1+e^{a}-a>0$，

所以存在 $x_0\in(-1+e^{-a},0)$，使得 $f'(x_0)=0$．　　　　　　　　　　…………………10 分

从而 $f(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,0)$ 上单调递减，

故当 $x\in(x_0,0)$，$f(x)>f(0)=0$，矛盾，舍去.　　　　　　　　　　　…………………11 分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,2]$.　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………12 分

法二： 当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$，即 $\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+2}<0$ 对 $\forall x\in(-1,0)$ 恒成立.

设 $g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+2}=\ln(x+1)+\dfrac{2a}{x+2}-a$，$x\in(-1,0)$．

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2a}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2)^2-2a(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}=\dfrac{x^2+(4-2a)(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$，$x\in(-1,0)$．

…………………6 分

记 $q(x)=x^2+(4-2a)(x+1)$，

当 $a\le 2$ 时，$q(x)>0$，$x\in(-1,0)$，　　　　　　　　　　　　　　　…………………7 分

所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，

所以 $g(x)<g(0)=0$，$x\in(-1,0)$，符合题意；　　　　　　　　　　…………………8 分

当 $a>2$ 时，$q(x)$ 开口向上，对称轴 $x=-2+a>0$，$q(-1)>0$，$q(0)<0$，

所以存在唯一 $x_0\in(-1,0)$，使得 $q(x_0)=0$，　　　　　　　　　　　　…………………9 分

当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$q(x)>0$，$g'(x)>0$；当 $x\in(x_0,0)$ 时，$q(x)<0$，从而 $g'(x)<0$

从而 $g(x)$ 在区间 $(-1,x_0)$ 递增，在区间 $(x_0,0)$ 递减，

故当 $x\in(x_0,0)$，$g(x)>g(0)=0$，矛盾，舍去.　　　　　　　　　　　…………………11 分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,2]$.　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………12 分

21. 解：(1)由题意可知 X 所有可能取值为 2,3,4，　　　　　　　　　　……………………1 分

$P(X=2)=\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$，$P(X=3)=\dfrac{A_3^2C_2^1}{3^3}=\dfrac{4}{9}$，$P(X=4)=\dfrac{A_3^3}{3^3}=\dfrac{2}{9}$．

……………………4 分

（其他解法：$P(X=2)=C_3^1\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{3}$，$P(X=3)=C_3^1C_2^1\times(\dfrac{1}{3})^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$，

$P(X=4)=1-P(X=2)-P(X=3)=\dfrac{2}{9}$．）

则 X 的分布列如下：……………………5 分

X	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

(2) 设甲一次性购买 x 个吉祥物盲盒，集齐三款吉祥物需要的总费用为 Z．

依题意， x 可取 0,1,2,3．

方案 1：不购买盲盒时，则需要直接购买三款吉祥物，总费用 $Z_1=3\times 30=90$ 元．

方案 2：购买 1 个盲盒时，则需要直接购买另外两款吉祥物，

总费用 $Z_2=19+2\times 30=79$ 元．……………………………………6 分

方案 3：购买 2 个盲盒时，

当 2 个盲盒打开后款式不同，则只需要直接购买剩下一款吉祥物，

总费用 $Z_3=2\times 19+30=68$， $P(Z_3=68)=\dfrac{A_3^2}{3^2}=\dfrac{2}{3}$；

（或 $P(Z_3=68)=C_3^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$）

当 2 个盲盒打开后款式相同，则需要直接购买另外两款吉祥物，

总费用 $Z_3=2\times 19+2\times 30=98$， $P(Z_3=98)=C_3^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$．

所以 $E(Z_3)=68\times\dfrac{2}{3}+98\times\dfrac{1}{3}=78$ (元)．……………………………………8 分

（别解： $E(Z_3)=30\times\dfrac{2}{3}+2\times 30\times\dfrac{1}{3}+38=78$ (元)）

方案 4：购买 3 个盲盒时，

当 3 个盲盒打开后款式各不相同，则总费用 $Z_4=3\times 19=57$，

$P(Z_4=57)=A_3^3(\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{2}{9}$；

当 3 个盲盒打开后恰有 2 款相同，则需要直接购买剩下一款吉祥物，

总费用 $Z_4=3\times 19+30=87$， $P(Z_4=87)=A_3^2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$；

当 3 个吉祥物盲盒打开后款式全部相同，则需要直接购买另外两款吉祥物，

总费用 $Z_4=3\times 19+60=117$， $P(Z_4=117)=C_3^1\times(\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{1}{9}$．

所以 $E(Z_4)=57\times\dfrac{2}{9}+87\times\dfrac{2}{3}+117\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{251}{3}$ (元)．……………………11 分

（别解： $E(Z_4)=30\times\dfrac{2}{3}+2\times 30\times\dfrac{1}{9}+3\times 19=\dfrac{251}{3}$ (元)）

显然 $E(Z_3)<E(Z_2)<E(Z_4)<Z_1$．

综上，应该一次性购买 2 个吉祥物盲盒．……………………………12 分

22.解：（1） 法一：设 PF 的中点为 G，依题意以 PF 为直径的圆内切于圆 $O: x^2+y^2=4$，

所以 $|GO|=2-\dfrac{|PF|}{2}$，即 $|PF|=4-2|GO|$，……………………1 分

设 $F_2(\sqrt{3},0)$，又 $2|OG|=|PF_2|$，所以 $|PF|+|PF_2|=4>2\sqrt{3}=|FF_2|$，……………2 分

所以点 P 的轨迹是以 F,F_2 为焦点，4 为长轴长的椭圆，

设 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $c=\sqrt{3},a=2,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以 P 的轨迹方程 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．……………………………………4 分

法二：设 $P(x,y)$，则 PF 的中点为 $G(\dfrac{x-\sqrt{3}}{2},\dfrac{y}{2})$，……………………1 分

依题意得 $|OG|=2-\dfrac{1}{2}|PF|$，即 $\sqrt{(\dfrac{x-\sqrt{3}}{2})^2+(\dfrac{y}{2})^2}=2-\dfrac{1}{2}\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2}$．……………………2 分

整理得 $\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}=4-\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2}$，……………………3 分

化简得点 P 的轨迹方程 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．……………………………………………4 分

（2）设 $S(x_1,y_1),T(x_2,y_2)$，先证明直线 ST 恒过定点，理由如下：

法一：由对称性可知直线 ST 的斜率不为 0，所以设直线 ST 的方程为：$x=my+n$．

联立直线 ST 与 E 的方程 $\begin{cases}x=my+n,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 得：$(m^2+4)y^2+2mny+n^2-4=0$，

所以 $\Delta>0$，即 $4+m^2-n^2>0$， ①

$y_1+y_2=\dfrac{-2mn}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{m^2+4}$． ② ……………………………5 分

所以直线 AS 的方程为：$x=\dfrac{x_1}{y_1-1}(y-1)$，令 $y=0$，解得点 M 横坐标 $t=\dfrac{-x_1}{y_1-1}$，

同理可得点 N 横坐标 $4-t=\dfrac{-x_2}{y_2-1}$，

故 $\dfrac{-x_1}{y_1-1}+\dfrac{-x_2}{y_2-1}=4$，………………………6 分

将 $x_1=my_1+n,x_2=my_2+n$ 代入上式整理得：

$(2m+4)y_1y_2+(n-m-4)(y_1+y_2)+4-2n=0$． ③ ……………………7 分

将②代入③并整理得 $m^2+2mn+n^2-2m-2n=0$，……………………8 分

即 m,n 满足方程 $(m+n)(m+n-2)=0$．

若 $m+n=0$，即 $n=-m$，则直线 ST 方程为 $x=m(y-1)$，过点 $A(0,1)$，不合题意；

所以 $m+n-2=0$，此时 $n=2-m$，直线 ST 的方程为 $x=m(y-1)+2$，

所以直线 ST 过定点 $Q(2,1)$．……………………10 分

因为直线 ST 过定点 $Q(2,1)$，且与轨迹 E 始终有两个交点，

又 $A(0,1)$，$AH\perp ST$，垂足为 H，

故点 H 的轨迹是以 AQ 为直径的半圆（不含点 A,Q，在直线 AQ 下方）．……….11 分

设 AQ 中点为 C，则圆心 $C(1,1)$，半径为 1.

所以 $|OH|\geq|OC|-1=\sqrt{2}-1$，当且仅当点 H 在线段 OC 上时，

故 $|OH|$ 的最小值为 $\sqrt{2}-1$．………………………………12 分

法二：①当直线 ST 斜率存在，设直线 ST 的方程为 $y=kx+m$.

联立直线 ST 与椭圆 E 的方程 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$

消去 x 得：$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

所以 $\Delta>0$，即 $4k^2+1-m^2>0$， ①

$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$. ② ……………………………5 分

所以直线 AS 的方程为：$x_1(y-1)=(y_1-1)x$，

（备注：若直线 AS 方程写成 $y-1=\dfrac{y_1-1}{x_1}x$，需另外考虑 $x_1=0$ 的情形，可参考方法四①.）

令 $y=0$，解得点 M 横坐标 $t=\dfrac{-x_1}{y_1-1}$，

同理可得点 N 横坐标 $4-t=\dfrac{-x_2}{y_2-1}$，

所以 $\dfrac{x_1}{y_1-1}+\dfrac{x_2}{y_2-1}=-4$， ……………………………6 分

即 $x_1(y_2-1)+x_2(y_1-1)=-4(y_1-1)(y_2-1)$，

将 $y_1=kx_1+m,\ y_2=kx_2+m$ 代入上式，得

$(4k^2+2k)x_1x_2+(1+4k)(m-1)(x_1+x_2)+4(m-1)^2=0$， ……………………7 分

将②代入上式，得 $(4k^2+2k)\dfrac{4(m^2-1)}{1+4k^2}+(1+4k)(m-1)\dfrac{-8km}{1+4k^2}+4(m-1)^2=0$.

整理得 $2km-2k+m^2-2m+1=(m-1)(2k+m-1)=0$， ……………………8 分

所以 $m=1-2k$.（其中 $m=1$ 时，直线 $ST:y=kx+1$ 过点 A，不符合题意，舍去.）

直线 ST 的方程为：$y=kx+(1-2k)$ 恒过定点 $Q(2,1)$.

②当直线 ST 斜率不存在，此时 $S(x_1,y_1),T(x_1,-y_1)$，

同理可得 $\dfrac{x_1}{y_1-1}+\dfrac{x_1}{-y_1-1}=-4$，即 $\dfrac{x_1}{2}=1-y_1^2$，

又 $\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，解得 $x_1=0$ 或 $x_1=2$.

若 $x_1=0$，则 S,T 中必有一点与 A 重合，不符合题意；

若 $x_1=2$，则 M,N 重合，也不符合题意. ………………………………9 分

综上，所以直线 ST 过定点 $Q(2,1)$. ………………………………10 分

后略，同法一.

法三：①若直线 AS,AT 的斜率均存在，即 $x_1\neq0$，$x_2\neq0$，

则 $k_{AS}=\dfrac{y_1-1}{x_1}=\dfrac{1}{-t}$，$k_{AT}=\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{1}{t-4}$

故 $\dfrac{x_1}{y_1-1}+\dfrac{x_2}{y_2-1}=-4$ ……………………………5 分

依题意直线 ST 不经过点 A，设直线 $ST: mx+n(y-1)=1$，

椭圆 E：$0=x^2+4y^2-4=x^2+4[(y-1)+1]^2-4=x^2+4(y-1)^2+8(y-1)$，

..................................6 分

联立 ST 与 E 的方程 $\begin{cases} mx+n(y-1)=1, \\ x^2+4(y-1)^2+8(y-1)=0, \end{cases}$

得 $x^2+4(y-1)^2+8(y-1)[mx+n(y-1)]=0$，

整理得 $(4+8n)(y-1)^2+8m(y-1)x+x^2=0$，

除以 $(y-1)^2$，得 $(4+8n)+8m\dfrac{x}{y-1}+(\dfrac{x}{y-1})^2=0$，..................................7 分

因为 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$ 满足上式，故由韦达定理得 $\dfrac{x_1}{y_1-1}+\dfrac{x_2}{y_2-1}=-8m=-4$，

解得 $m=\dfrac{1}{2}$．..................................8 分

所以直线 $ST: \dfrac{1}{2}x+n(y-1)=1$ 恒过定点 $Q(2,1)$．..................................9 分

②若直线 AS 或 AT 的斜率不存在时，易求直线 ST：$y=x-1$，过点 $Q(2,1)$．

综上，所以直线 ST 过定点 $Q(2,1)$．..10 分

后略，同法一．

法四：①当 $t=0$ 时，易知直线 AM：$x=0$；直线 AN：$y=-\dfrac{1}{4}x+1$．

AM，AN 分别与轨迹 E 的方程联立求得 $S(0,-1)$，$T(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5})$，

故直线 $ST: y=x-1$．......................................5 分

②当 $t=4$ 时，同理求得直线 $ST: y=x-1$．

③当 $t\neq 0,2,4$ 时，直线 $AM: \dfrac{x}{t}+y=1$，

联立直线 AM 与轨迹 E 的方程，消去 y 得 $x(\dfrac{t^2+4}{4t^2}x-\dfrac{2}{t})=0$，

所以 $x_1=\dfrac{8t}{t^2+4}$（S 异于 A），所以 $y_1=-\dfrac{1}{t}x_1+1=\dfrac{-8}{t^2+4}+1$．..................6 分

同理得 $x_2=\dfrac{8(4-t)}{(4-t)^2+4}, y_2=\dfrac{-8}{(4-t)^2+4}+1$．..................................7 分

所以直线 ST 的斜率 $k_{ST}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{-8[(4-t)^2+4]+8(t^2+4)}{8t[(4-t)^2+4]-8(4-t)(t^2+4)}=\dfrac{4}{(t-2)^2}$，

..................................8 分

所以直线 ST 的方程为 $y+\dfrac{8}{t^2+4}-1=\dfrac{4}{(t-2)^2}(x-\dfrac{8t}{t^2+4})$ ①

$$y-1=\frac{4}{(t-2)^2}(x-\frac{8t}{t^2+4}-\frac{(t-2)^2}{4}\cdot\frac{8}{t^2+4})=\frac{4}{(t-2)^2}(x-2)$$

综上，所以直线 ST 过定点 $Q(2,1)$．.........................10 分

后略，同法一．