参考答案(理科)

一、单选题：共 12 道小题，每题 5 分,共 60 分.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	D	B	C	C	A	D	A	D	B	D

二、填空题：共 4 道小题，每题 5 分,共 20 分.

13. -1　　14. -70　　15. $\dfrac{3\pi}{4}$　　16. $3\sqrt{2}$

三、解答题：共 5 道大题，共 70 分.

17.（12 分)解：

（1）设数列$\{a_n\}$的公比为 q，数列$\{b_n\}$的公差为 d，

由 $a_1=2b_1=2$，有 $a_1=2$，$b_1=1$，

又由 $a_2=2b_2$，有 $2q=2(d+1)$，有 $q=d+1$，

又由 $a_3=2b_3+2$，有 $2q^2=2(1+2d)+2$，有 $q^2=2d+2$，

可得 $q^2=2q$，得 $q=2$ 或 $q=0$（舍去），$d=1$，

故 $a_n=2^n$，$b_n=n$；

（2）证明：由（1）知：$c_n=\dfrac{b_n^2}{a_n}=\dfrac{n^2}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

则 $c_{n+1}-c_n=\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}-\dfrac{n^2}{2^n}=\dfrac{2n+1-n^2}{2^{n+1}}$

当 $n\geqslant 3$ 时，$c_{n+1}-c_n<0$，即 $c_3>c_4>c_5>c_6>c_7>\cdots>0$，

而 $c_1=\dfrac{1}{2},c_2=1,c_3=\dfrac{9}{8},c_4=1$，当 $n\geqslant 4$ 时，有 $\dfrac{T_{n+1}}{T_n}=c_{n+1}<1$，

则 $T_1=\dfrac{1}{2},T_2=\dfrac{1}{2},T_3=\dfrac{9}{16},T_4=\dfrac{9}{16}>T_5>T_6>\cdots$,故 $T_n\leq\dfrac{9}{16}$.

18.（12 分）解：

（1）ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，

$P(\xi=0)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{25}$，$P(\xi=1)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{4}\times C_2^1\cdot\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{14}{25}$，

$P(\xi=2)=\dfrac{3}{4}\times C_2^1\cdot\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{4}$，$P(\xi=3)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{100}$，

∴ ξ 的分布列如下：

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{14}{25}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{100}$

$E(\xi)=\dfrac{14}{25}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{100}=\dfrac{115}{100}=\dfrac{23}{20}$.

（2）记事件 A 为“该学生复评晋级”，事件 B 为“该学生初评是 C”，

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.15\times\frac{1}{5}}{0.6\times\frac{1}{4}+0.15\times\frac{1}{5}+0.05\times\frac{1}{6}}=\frac{18}{113}.$$

19.（12 分）解：

（1）由 $BC // AD, \angle ADC = 90^\circ, AB = BC = 2DE$，所以平面四边形 $ABCD$ 为直角梯形，设 $AB = BC = 2DE = 4a$，因为 $\angle ABC = 120^\circ$.

所以在 $Rt\triangle CDE$ 中，$CD = 2\sqrt{3}a, EC = 4a, \tan\angle ECD = \dfrac{DE}{CD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\angle ECD = 30^\circ$，又 $\angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$，所以 $\angle BCE = 60^\circ$，山 $EC = BC = AB = 4a$，

所以 ΔBCE 为等边三角形，

又 F 是 EC 的中点，所以 $BF \perp EC$，又 $BF \perp PC, EC, PC \subset$ 平面 $PEC, EC \cap PC = C$，

则有 $BF \perp$ 平面 PEC，

而 $BF \subset$ 平面 $ABCE$，故平面 $PEC \perp$ 平面 $ABCE$.

（2）在 $Rt\Delta PEC$ 中，$PE = DE = PF = \dfrac{1}{2}EC = 2a$，取 EF 中点 O，所以 $PO \perp EF$，

由（1）可知平面 $PEC \perp$ 平面 $ABCE$，平面 $PEC \cap$ 平面 $ABCE = EC$，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCE$，

以 O 为坐标原点，$\vec{OC}$ 方向为 y 轴方向，

建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $P(0,0,\sqrt{3}a), A(2\sqrt{3}a,-3a,0), B(2\sqrt{3}a,a,0), C(0,3a,0)$，

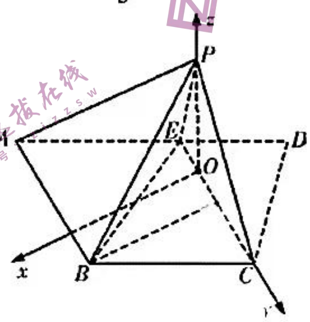
$\overrightarrow{PA} = (2\sqrt{3}a,-3a,-\sqrt{3}a), \overrightarrow{PB} = (2\sqrt{3}a,a,-\sqrt{3}a), \overrightarrow{PC} = (0,3a,-\sqrt{3}a)$，

设平面 PAB 的法向量 $\vec{m} = (x,y,z)$，由 $\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{PA} = 0, \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PB} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2\sqrt{3}ax - 3ay - \sqrt{3}az = 0, \\ 2\sqrt{3}ax + ay - \sqrt{3}az = 0, \end{cases}$ 取 $x = 1$，则 $\vec{m} = (1,0,2)$

设直线 PC 与平面 PAB 所成角大小为 θ，

则 $\sin\theta = \dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\vec{m}||\overrightarrow{PC}|} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(3a)^2+(-\sqrt{3}a)^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

故直线 PC 与平面 PAB 所成角的止弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



20.(12 分)解：

（1）由题得：$\dfrac{\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，两边平分并化简得 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，即曲线 C 的方程.

（2） 设点 $G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$.

直线 $GH: y = k(x-t)(k>0)$ 与椭圆 C 的方程 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立，

消去y得$\left(1+4k^2\right)x^2-8k^2tx+\left(4k^2t^2-4\right)=0$.

由韦达定理：$x_1+x_2=\dfrac{8k^2t}{1+4k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{4k^2t^2-4}{1+4k^2}$.

由条件，直线AG的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}\left(x+2\right)$，直线$AH$的方程为$y=\dfrac{y_2}{x_2+2}\left(x+2\right)$，

于是可得$y_M=\dfrac{y_1\left(t+2\right)}{x_1+2}$，$y_N=\dfrac{y_2\left(t+2\right)}{x_2+2}$.

因为A，O，M，N四点共圆，由相交弦定理可知$y_M(-y_N)=(-t)(t+2)$，

化简得$\dfrac{y_1y_2}{\left(x_1+2\right)\left(x_2+2\right)}=\dfrac{t}{t+2}$

又$y_1=k\left(x_1-t\right)$，$y_2=k\left(x_2-t\right)$，代入整理得：$\dfrac{k^2\left(x_1x_2-t\left(x_1+x_2\right)+t^2\right)}{x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)+4}=\dfrac{t}{t+2}$.

将韦达定理代入化简得：$\dfrac{t^2-4}{4(t+2)^2}=\dfrac{t}{t+2}$，即$t=-\dfrac{2}{3}$.

21.(12分)解：

(1) 由$\lambda=1$知，$F(x)=\cos a-\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$，$F'(x)=-\dfrac{\cos x(x-a)-(\sin x-\sin a)}{(x-a)^2}$，令

$G(x)=-\cos x(x-a)+(\sin x-\sin a)$，由$G'(x)=\sin x(x-a)>0$，知$G(x)$在$(a,\dfrac{\pi}{2})$上单增，

有$G(x)>G(a)=0$，即$F'(x)>0$，亦知$F(x)$在$(a,\dfrac{\pi}{2})$上单调递增.

(2) 设$f(x)=[(1-\lambda)\cos x+\lambda\cos a](x-a)-(\sin x-\sin a)$，且$x\in(a,\dfrac{\pi}{2})$，

$f'(x)=\lambda(\cos a-\cos x)-(1-\lambda)(x-a)\sin x$，$f''(x)=(2\lambda-1)\sin x+(\lambda-1)(x-a)\cos x$，

1) 当$\lambda\le\dfrac{1}{2}$时，由$f''(x)\le(2\cdot\dfrac{1}{2}-1)\sin x+(\dfrac{1}{2}-1)(x-a)\cos x=-\dfrac{1}{2}(x-a)\cos x<0$，知$f'(x)$在$(a,\dfrac{\pi}{2})$上单减，有$f'(x)<f'(a)=0$，亦知$f(x)$在$(a,\dfrac{\pi}{2})$上单减，有$f(x)<f(a)=0$，即$F(x)=\dfrac{f(x)}{x-a}<0$，满足题设；

2) 当$\dfrac{1}{2}<\lambda<1$时，对$x\in(a,\dfrac{\pi}{2})$，

$f''(x)=(2\lambda-1)\sin x+(\lambda-1)(x-a)\cos x>(2\lambda-1)\sin a+(\lambda-1)(x-a)$，

取$b=\min\{\dfrac{\pi}{2},a+\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}\sin a\}$，当$x\in(a,b)$时，$f''(x)>0$，知$f'(x)$在$(a,b)$上单增，有$f'(x)>f'(a)=0$，亦知$f(x)$在$(a,b)$上单增，有$f(x)>f(a)=0$，即$F(x)=\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，不满足题设；

3) 当$\lambda\ge1$时，对$x\in(a,\dfrac{\pi}{2})$，$f'(x)=\lambda(\cos a-\cos x)-(1-\lambda)(x-a)\sin x\ge\cos a-\cos x>0$，知$f(x)$在$(a,\dfrac{\pi}{2})$上单增，有$f(x)>f(a)=0$，即$F(x)=\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，不满足题设；

综上，仅当$\lambda\le\dfrac{1}{2}$时，满足题设.

22.(10 分)解:

【详解】(1) 由曲线C的极坐标方程为$\rho^2=\dfrac{2}{1+\cos^2\theta}$，可得$\rho^2+\rho^2\cos^2\theta=2$，又由$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

代入可得$2x^2+y^2=2$，即曲线C的直角坐标方程为$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2) 把直线参数方程$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y-1+t\sin\alpha\end{cases}$($t$为参数)，代入曲线$C$的直角坐标方程$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$，

整理得$(1+\cos^2\alpha)t^2+2\sin\alpha\cdot t-1=0$，设$A,B$对应的参数分别为$t_1,t_2$，得$t_1+t_2=-\dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}, t_1\cdot t_2=-\dfrac{1}{1+\cos^2\alpha}$，

因为点$P(0,1)$恰为线段AB的三等分点，不妨设$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，则$|t_1|=2|t_2|$，

所以$t_1=-2t_2$，代入$t_1+t_2=-\dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}, t_1\cdot t_2=-\dfrac{1}{1+\cos^2\alpha}$，化简得$\sin^2\alpha=\dfrac{2}{9}$，又因为$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

23.(10 分)解:

(Ⅰ)当$m=0$时，不等式$|2x|+|x-2|<5$可转化为:

$\begin{cases}x<0\\ -2x+2-x<5\end{cases}$或$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ 2x-x+2<5\end{cases}$或$\begin{cases}x>2\\ 2x+x-2<5\end{cases}$ ………………………… 2 分

整理得:

$\begin{cases}x<0\\ x>-1\end{cases}$或$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ x<3\end{cases}$或$\begin{cases}x>2\\ x<\dfrac{7}{3}\end{cases}$

所以不等式的解集为:$\{x\mid -1<x<\dfrac{7}{3}\}$ ………………………… 5 分

(Ⅱ)因为$|2x-2|-|2x+m|\leqslant|2x-2-2x-m|=|m+2|$

若$|2x-2|-f(x)<m^2$恒成立.

只需求解$|m+2|<m^2$即可 ………………………… 8 分

从而$\begin{cases}m+2<m^2\\ m+2>-m^2\end{cases}$解得 $m<-1$ 或 $m>2$ ………………………… 10 分