

2024届高三湖北十一校第一次联考 参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	A	B	C	C	D	D	BCD	AB	AD	ACD

1.A 【解析】 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\complement_U B = \{0, 2, 4, 6\}$ $\therefore A \cap \complement_U B = \{0, 2, 4\}$

2.C 【解析】 $z + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ \therefore 虚部为 $\frac{1}{2}$

3.A 【解析】 $x^3 > 8 \Leftrightarrow x > 2$, $|x| > 2 \Leftrightarrow x > 2$ 或 $x < -2$, 前面可以推导后面, 后面不能推导前面

4.B 【解析】 $t = 4$ 时, $f(4) = ae^{4\lambda} = 2a \therefore e^{4\lambda} = 2$, 再过 t_1 年, $f(4+t_1) = ae^{(4+t_1)\lambda} = 8a$
 $\Rightarrow e^{(4+t_1)\lambda} = 8 = 2^3 = e^{12\lambda} \Rightarrow t_1 = 8$

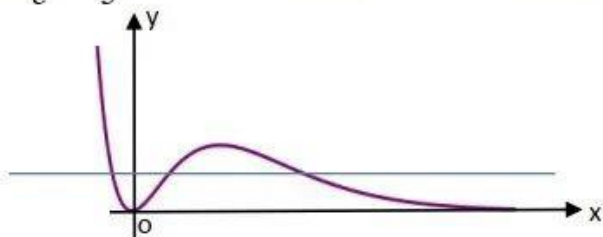
5.C 【解析】 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot (|\overrightarrow{AP}| \cos \angle PAB)$, 由投影的定义知 $|\overrightarrow{AP}| \cos \angle PAB \in [2, 3]$
 $\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} \in [4, 6]$

6.C 【解析】 $f(-x) + f(x) = 0$, $\therefore f(x)$ 为奇函数, $f'(x) = 2\cos x - (e^x + e^{-x})$, $2\cos x \leq 2$
 $e^x + e^{-x} \geq 2$, $\therefore f'(x) \leq 0 \therefore f(x)$ 为减函数, $f(x^2 - 4) + f(3x) < 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 4 > -3x \Leftrightarrow x > 1$ 或 $x < -4$

7. D 【解析】 将 8 按 3 同余分类得到: $A_0 = \{3, 6, 9\}$, $A_1 = \{1, 4, 7, 10\}$, $A_2 = \{2, 5, 8\}$,

$$\therefore P = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_3^3 + C_3^1 C_4^1 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{20}$$

8.D 【解析】 由 $2e^x - 5x^2 = 0$ 得 $\frac{x^2}{e^x} = \frac{2}{5}$, 构造函数 $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$, 求得 $g'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$
 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 2)$ 上单调递增, $(2, +\infty)$ 上单调递减, 且 $g(0) = 0$,
 $g(2) = \frac{4}{e^2} > \frac{2}{5}$ 及 $x \rightarrow +\infty$ 时 $g(x) \rightarrow 0$, $g(x)$ 的图像如图, 得到 $g(x) = \frac{2}{5}$ 有 3 个解.



9. BCD

10. AB 【解析】 $(-\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{3}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 由三角函数的定义 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

取 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, $\therefore f(x) = \sin(2x - \frac{5\pi}{6})$, $\therefore A$ 正确. 来源: 高三答案公众号

$B: x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f(x) = 1$ 正确,

C: 平移后应为 $y = \sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right)$ 所以 C 错.

D: 由 $\sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = 0$ 得 $2x - \frac{5\pi}{6} = k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, 仅 $k=0,1$ 符合, 恰有两个零点, 所以 D 错.

11. AD 【解析】A: $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = \overrightarrow{AB}^2 = 1$, 故 A 正确;

B: 如图, 过 A 作 $AE \parallel BD$, 且 $AE = BD$, 连接 ED, EC , 则 $ABDE$ 为正方形, $\angle CAE$ 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角, 当 $\angle CAE = 60^\circ$ 时, 易得 $\triangle ACE$ 为正三角形, 过 C 作 $CH \perp AE$,

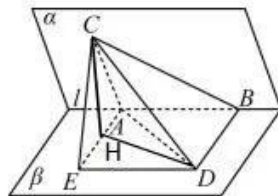
则 $CH \perp$ 平面 AED , 故 $\angle CDH$ 即为 CD 与平面 β 所成的角.

在 $Rt\triangle CDH$ 中, $\sin \angle CDH = \frac{CH}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 故 B 错误;

C: $CD = \sqrt{3}$ 时 $\angle CAE = 90^\circ$, C 到面 β 的距离为 1, 所以四面体 $ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot 1 = \frac{1}{6}$, 所以 C 错

D: 由 $CD = \sqrt{2}$ 可得 $\angle CAE = 60^\circ$ 如图, 取 AE 的中点 M , BD 的中点 N , 连接 CM, MN, CN 则二面角

$C-BD-A$ 的平面角为 $\angle CNM$, $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}, MN = 1$, 所以 $\cos \angle CNM = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.



12. ACD 【解析】等轴双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$ 所以 A 正确,

B: 设 $P(x_0, y_0), d_1 d_2 = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = \frac{x_0^2 - y_0^2}{2} = \frac{a^2}{2}$ 所以 B 错.

C: $\tan \alpha \cdot \tan \beta = k_{PA} \cdot (-k_{PB}) = -1, \tan \gamma = -\tan(\alpha + \beta) = -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{2}$

所以 $\tan \alpha + \tan \beta + 2 \tan \gamma = 0$, C 正确.

D: 方法 1: 设 l 与双曲线及其渐近线依次交于 E, F, G, H

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 - y^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow (k^2 - 1)x^2 + 2mkx + m^2 + a^2 = 0$ 得 EH 中点的横坐标为 $\frac{mk}{1 - k^2}$

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (k^2 - 1)x^2 + 2mkx + m^2 = 0$ 得 FG 中点的横坐标为 $\frac{mk}{1 - k^2}$,

所以 EH 和 FG 的中点重合, 即 M 为双曲线弦 EH 的中点,

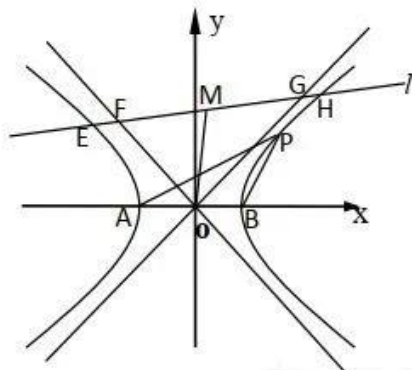
由点差法得 $k_1 k_2 = 1$, 所以 D 正确.

方法 2: 设 $F(x_1, y_1), G(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$

由

$$\begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = 0 \\ x_2^2 - y_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$$

$\therefore 2x_0 - 2y_0 k_1 = 0 \Rightarrow k_1 k_2 = 1$, 所以 D 正确.



三. 填空题: 13. -40 14. 25 15. 6 16. $a \geq e$

13. -40 【解析】 $C_5^3(2x)^2(-1)^3 = -40x^2$

14. 25 【解析】 $x+4y \geq 4\sqrt{xy}$, $xy-5 \geq 4\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 5 \Rightarrow xy \geq 25$

15. 6 【解析】由抛物线的定义知 $|MN| = |MF|$, 所以 $\angle MNF = \angle MFN = \angle NFO = \frac{\pi}{3}$,

$$|NF| = \frac{p}{\cos \frac{\pi}{3}} = 8, \quad |MN| = |MF| = 8, \quad |MF| = x_M + 2, \text{ 所以 } x_M = 6.$$

16. $a \geq e$ 【解析】 $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{x_1 x_2} - \frac{e^{ax_2}}{e^{ax_1}} < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{x_1 x_2} < e^{ax_2 - ax_1}$

$$\text{两边取对数 } x_1 x_2 \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) < ax_2 - ax_1 \Leftrightarrow \ln x_2 - \ln x_1 < \frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2} \Leftrightarrow \ln x_2 + \frac{a}{x_2} < \ln x_1 + \frac{a}{x_1}$$

所以 $h(x) = \ln x + \frac{a}{x}$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 所以 $h'(x) \leq 0$ 在 $(1, e)$ 上恒成立, 解出 $a \geq e$

四. 解答题:

17. 解: (1) 由 $B = \frac{\pi}{2} - A$ 得: $C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2} - 2A$ 2分

$$\therefore \cos C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2A\right) = \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\because B > A, \text{ 故 } A \text{ 为锐角, } \therefore \cos A = \frac{4}{5} \text{ 4分}$$

$$\therefore \cos C = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \text{ 6分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知: } \sin B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A = \frac{4}{5}, \quad \sin C = \frac{7}{25}$$

$$\text{由正弦定理得: } \frac{a}{\sin A} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{25}{3} \text{ 10分}$$

$$\therefore a+b+c = \frac{25}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) = \frac{25}{3}\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{7}{25}\right) = 14$$

故 $\triangle ABC$ 的周长为 14. 12分

18. 解: (1) 由 a_1, a_6, a_{16} 成等比数列, 故 $a_1 a_{16} = a_6^2$, 即 $a_1(a_1 + 15d) = (a_1 + 5d)^2$

$$\text{即 } 25d^2 = 5a_1 d, \text{ 又 } d \neq 0 \text{ 故 } a_1 = 5d, \quad a_n = a_1 + (n-1)d = (n+4)d \text{ 2分}$$

$$\text{故等比数列的公比 } q = \frac{a_6}{a_1} = 2 \text{ 4分}$$

$$(2) \text{ 在等差数列 } \{a_n\} \text{ 中, } a_{k_n} = a_1 + (k_n - 1)d = (k_n + 4)d \text{ 6分}$$

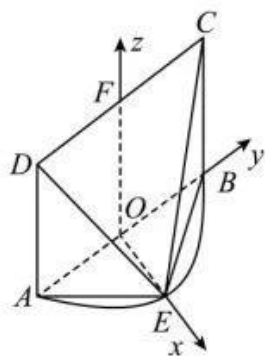
$$\text{在等比数列 } \{a_{k_n}\} \text{ 中, } a_{k_n} = a_{k_1} \cdot 2^{n-1} = a_1 \cdot 2^{n-1} = 5d \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{故 } (k_n + 4)d = 5d \cdot 2^{n-1}, \text{ 即 } k_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 4 \text{ 9分}$$

$$k_1+k_2+\dots+k_n=5\cdot(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})-4n=5\cdot 2^n-4n-5 \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19 解: (1) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 为矩形, $\therefore AB \parallel CD$,
 $\because AB \subset$ 平面 ABE , $CD \not\subset$ 平面 ABE , $\therefore CD \parallel$ 平面 ABE 2 分
 又 $CD \subset$ 平面 CDE , 平面 $ABE \cap$ 平面 $CDE = l$, $\therefore l \parallel CD$,4 分
 $\because CD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore l \parallel$ 平面 $ABCD$6 分

(2) 取 AB, CD 的中点分别为 O, F , 连接 OE, OF , 则 $OF \perp AB$,
 \because 平面 $ABCD \perp$ 平面 ABE , 且交线为 AB , $\therefore OF \perp$ 平面 ABE ,
 又 $OE \subset$ 平面 ABE , $OF \perp OE$, 来源: 高三答案公众号
 当 l 与半圆弧 AB 相切时, $OE \perp l$, 即 $OE \perp AB$,
 以 OE, OB, OF 所在的直线分别为 x, y, z 轴,
 建立如图所示的空间直角坐标系,7 分
 不妨设 $BC=1$, 易得 $A(0, -2, 0), C(0, 2, 1), D(0, -2, 1), E(2, 0, 0)$,
 则 $\overrightarrow{DE}=(2, 2, -1), \overrightarrow{AD}=(0, 0, 1), \overrightarrow{DC}=(0, 4, 0)$,
 设 $\vec{m}=(x_1, y_1, z_1)$ 为平面 DAE 的一个法向量,



$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{DE} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} z_1 = 0 \\ 2x_1 + 2y_1 - z_1 = 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} z_1 = 0 \\ x_1 = -y_1 \end{cases},$$

令 $x_1=1$, 则 $\vec{m}=(1, -1, 0)$ 9 分

设 $\vec{n}=(x_2, y_2, z_2)$ 为平面 DCE 的一个法向量, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{DC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{DE} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$

$$\text{即} \begin{cases} 4y_2 = 0 \\ 2x_2 + 2y_2 - z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ 2x_2 = z_2 \end{cases} \text{令 } x_2=1, \text{ 则 } \vec{n}=(1, 0, 2) \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 所以两平面的夹角的余弦值为 } \frac{\sqrt{10}}{10}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

20 解: (1) 小球三次碰撞全部向左偏或者全部向右偏落入 B 袋, 故概率 $P(B) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$

小球落入 A 袋中的概率 $P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 2 分

$$\text{故 } P_1 = P(A) = \frac{3}{4}, P_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{13}{16}, P_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + C_2^1 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{51}{64} \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

(2) 法 1: 游戏过程中累计得不到 n 分, 只可能在得到 $n-1$ 分后的一次游戏中小球落入 B 袋 (+2 分)

$$\text{故 } 1 - P_n = \frac{1}{4} P_{n-1} \text{ 即 } P_n = 1 - \frac{1}{4} P_{n-1} (n \geq 2) \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

法 2: 游戏过程中累计得 n 分可以分为两种情况: 得到 $n-2$ 分后的一次游戏小球落入 B 袋中 (+2 分), 或得到 $n-1$ 分后的一次游戏中小球落入 A 袋中 (+1) 分,

$$\text{故 } P_n = \frac{3}{4} P_{n-1} + \frac{1}{4} P_{n-2} \Rightarrow P_n + \frac{1}{4} P_{n-1} = P_{n-1} + \frac{1}{4} P_{n-2} (n \geq 3)$$

故 $\left\{P_n + \frac{1}{4}P_{n-1}\right\}$ 为常数数列且 $P_2 + \frac{1}{4}P_1 = 1$, 故 $P_n + \frac{1}{4}P_{n-1} = 1$ 即 $P_n = 1 - \frac{1}{4}P_{n-1} (n \geq 2)$ 8分

由 $P_n = 1 - \frac{1}{4}P_{n-1} \Rightarrow P_n - \frac{4}{5} = -\frac{1}{4}\left(P_{n-1} - \frac{4}{5}\right)$ 10分

故 $\left\{P_n - \frac{4}{5}\right\}$ 为等比数列且首项为 $P_1 - \frac{4}{5} = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{20}$, 公比为 $-\frac{1}{4}$

故 $P_n - \frac{4}{5} = \left(-\frac{1}{20}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, 故 $P_n = \left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{4}{5}$ 12分

21. 解: (1) 设动圆半径为 r , 由圆 M 与圆 F_1 外切得: $|MF_1| = r + \frac{1}{2}$, 由圆 M 与圆 F_2 内切得: $|MF_2| = \frac{7}{2} - r$

故 $|MF_1| + |MF_2| = 4 > |F_1F_2| = 2$,2分

故点 M 的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的椭圆, 且 $2a = 4, 2c = 2$, 故 $b^2 = 3$

\therefore 点 M 的轨迹 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4分

(2) 设 $l: y = k(x-1), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

由 $\begin{cases} y = k(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$ 6分

故 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3}, x_1x_2 = \frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3}$, AB 的中点 $M\left(\frac{4k^2}{4k^2 + 3}, \frac{-3k}{4k^2 + 3}\right)$

故 AB 的中垂线的方程为: $y + \frac{3k}{4k^2 + 3} = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{4k^2}{4k^2 + 3}\right)$ 8分

因为 AA' 的中垂线为 x 轴, 故 AB 的中垂线与 x 轴的交点即为外心 Q ,

令 $y=0$ 得: $x_Q = \frac{k^2}{4k^2 + 3}$, 故 $|QF_2| = \left|\frac{k^2}{4k^2 + 3} - 1\right| = \frac{3(k^2 + 1)}{4k^2 + 3}$ 9分

又 $|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \frac{12\sqrt{1+k^2}}{4k^2 + 3} = \frac{12(1+k^2)}{4k^2 + 3}$ 10分

故 $\frac{|QF_2|}{|AB|} = \frac{1}{4}$ (定值)12分

22. 解: $f'(x) = \frac{1}{x} \therefore$ 切线 l 的方程为: $y - \ln(mx_1) = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$ 即: $y = \frac{1}{x_1}x + \ln(mx_1) - 1$

令 $y=0$ 得 $x_2 = x_1(1 - \ln(mx_1))$ 2分

(1) 当 $x_1 = \frac{1}{e}, m=1$ 时切线 l 的方程为: $y = ex - 2$ 4分

(2) 由 $x_2 > 0$ 得 $x_1(1 - \ln(mx_1)) > 0 \because m > 0 \therefore x_1 > 0, 1 - \ln mx_1 > 0 \Rightarrow 0 < x_1 < \frac{e}{m}$

$x_2 = x_1(1 - \ln mx_1)$, 令 $g(x) = x(1 - \ln mx)$, $x \in (0, \frac{e}{m})$

令 $g'(x) = -\ln mx$, 由 $g'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{m}$

且 $x \in (0, \frac{1}{m})$ 时 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $x \in (\frac{1}{m}, \frac{e}{m})$ 时 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减

$\therefore g(x)_{\max} = g(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m} \therefore$ 当 $0 < x_1 < \frac{e}{m}$, $x_2 = g(x_1) \leq \frac{1}{m} \therefore |x_2 - \frac{1}{m}| = \frac{1}{m} - x_2 \dots\dots\dots 6$ 分

① 当 $0 < x_1 \leq \frac{1}{m}$ 时 $|x_1 - \frac{1}{m}| = \frac{1}{m} - x_1$, $|x_2 - \frac{1}{m}| = \frac{1}{m} - x_2 = \frac{1}{m} - x_1(1 - \ln mx_1) = x_2 - x_1 = -x_1 \ln mx_1$,

$\because 0 < x_1 \leq \frac{1}{m}, \therefore -x_1 \ln mx_1 \geq 0 \therefore |x_1 - \frac{1}{m}| \geq |x_2 - \frac{1}{m}| \dots\dots\dots 8$ 分

② 当 $\frac{1}{m} < x_1 < \frac{e}{m}$ 时 $|x_1 - \frac{1}{m}| - |x_2 - \frac{1}{m}| = (x_1 - \frac{1}{m}) - (\frac{1}{m} - x_2) = x_2 + x_1 - \frac{2}{m} = x_1(2 - \ln mx_1) - \frac{2}{m}$,

令 $h(x) = x(2 - \ln mx) - \frac{2}{m}$, $x \in (\frac{1}{m}, \frac{e}{m})$, $h'(x) = 1 - \ln mx$, 当 $x \in (\frac{1}{m}, \frac{e}{m})$ 时 $h'(x) > 0$

$\therefore h(x)$ 在 $(\frac{1}{m}, \frac{e}{m})$ 上单调递增 $\therefore h(x) > h(\frac{1}{m}) = 0 \therefore |x_1 - \frac{1}{m}| > |x_2 - \frac{1}{m}|$

综上, $|x_1 - \frac{1}{m}| \geq |x_2 - \frac{1}{m}| \dots\dots\dots 12$ 分




关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

