秘密 ★ 启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：B

2024届广州市高三年级调研测试

数　学

本试卷共5页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项： 1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知复数 z 满足 $z+\bar{z}=2$，$z-\bar{z}=-4\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A．1　　　B．2　　　C．$\sqrt{5}$　　　D．$2\sqrt{5}$

2．已知集合 $M=\{x|y=\ln(1-2x)\}$，$N=\{y|y=\mathrm{e}^x\}$，则 $M\cap N=$

A．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　　B．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　　C．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　　D．$\varnothing$

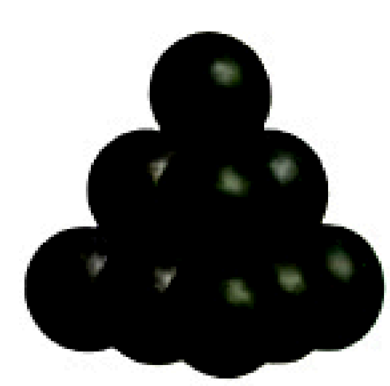
3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,t)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{j}=(0,1)$ 上的投影向量为

A．$\boldsymbol{j}$　　　B．$-\boldsymbol{j}$　　　C．$2\boldsymbol{j}$　　　D．$-2\boldsymbol{j}$

4．已知函数 $f(x)=a+\dfrac{b}{3^x-1}\ (ab\neq 0)$ 是奇函数，则

A．$2a+b=0$　　　B．$2a-b=0$　　　C．$a+b=0$　　　D．$a-b=0$

5．如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中，后人称为“三角垛”．“三角垛”的最上层有1个球，第二层有3个球，第三层有6个球，……．记各层球数构成数列 $\{a_n\}$，且 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列，则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 100 项和为



A．$\dfrac{99}{100}$　　　B．$\dfrac{100}{101}$　　　C．$\dfrac{99}{50}$　　　D．$\dfrac{200}{101}$

6. 直线$l:y=kx-2$与圆$C:x^2+y^2-6x-7=0$交于A,B两点，则$|AB|$的取值范围为

A. $[\sqrt{7},4]$　　B. $[2\sqrt{7},8]$　　C. $[\sqrt{3},4]$　　D. $[2\sqrt{3},8]$

7. 已知$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$，则$\tan\alpha\tan\beta$的值为

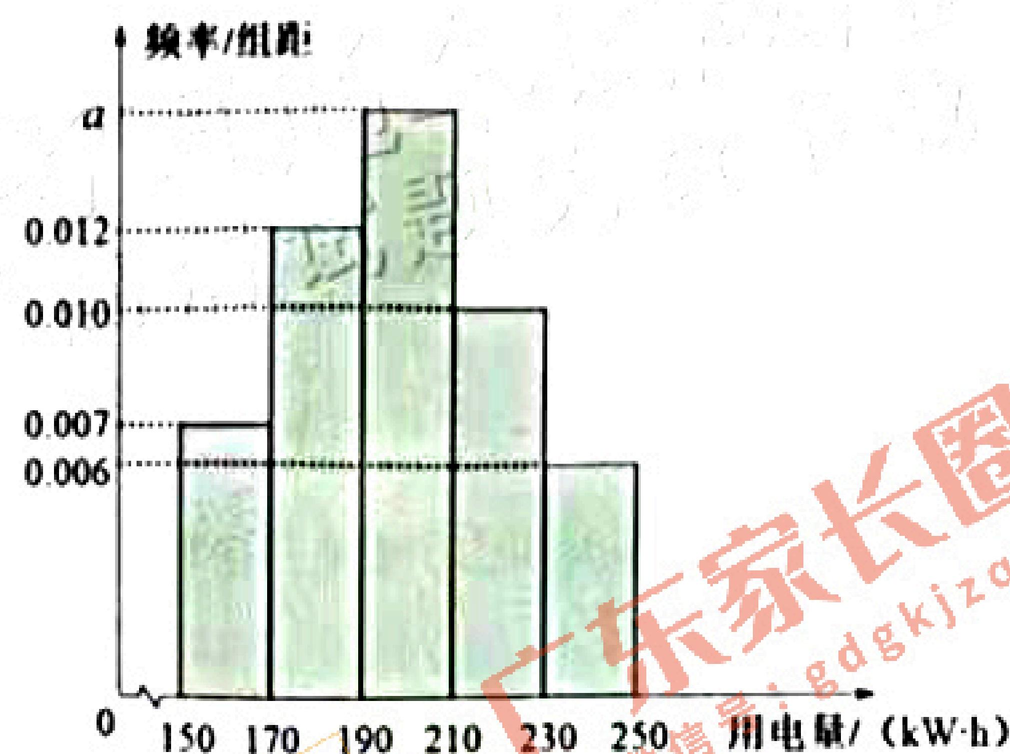
A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{5}{3}$　　D. 2

8. 若函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+x+1$在区间$(0,2)$上存在极小值点，则$a$的取值范围为

A. $\left(1,\dfrac{5}{4}\right)$　　B. $\left[1,\dfrac{5}{4}\right)$　　C. $\left[\dfrac{5}{4},2\right)$　　D. $(1,+\infty)$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分．

9. 某市实行居民阶梯电价收费政策后有效促进了节能减排．现从某小区随机调查了200户家庭十月份的用电量（单位：kW·h），将数据进行适当分组后（每组为左闭右开的区间），画出如图所示的频率分布直方图，则



A. 图中a的值为0.015

B. 样本的第25百分位数约为217

C. 样本平均数约为198.4

D. 在被调查的用户中，用电量落在$[170,230)$内的户数为108

10. 已知双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2}=1(a>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过点$F_2$的直线$l$与双曲线$E$的右支相交于$P$，$Q$两点，则

A. 若E的两条渐近线相互垂直，则$a=\sqrt{2}$

B. 若E的离心率为$\sqrt{3}$，则E的实轴长为1

C. 若$\angle F_1PF_2=90^\circ$，则$|PF_1|\cdot|PF_2|=4$

D. 当a变化时，$\triangle F_1PQ$周长的最小值为$8\sqrt{2}$

11．已知点$P\left(\dfrac{3\pi}{8},1\right)$是函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)+b\ (\omega>0)$的图象的一个对称中心，则

A．$f\left(x-\dfrac{3\pi}{8}\right)-1$是奇函数

B．$\omega=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{3}k,k\in\mathbf{N}^*$

C．若$f(x)$在区间$\left(\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{11\pi}{8}\right)$上有且仅有2条对称轴，则$\omega=2$

D．若$f(x)$在区间$\left(\dfrac{\pi}{5},\dfrac{2\pi}{5}\right)$上单调递减，则$\omega=2$或$\omega=\dfrac{14}{3}$

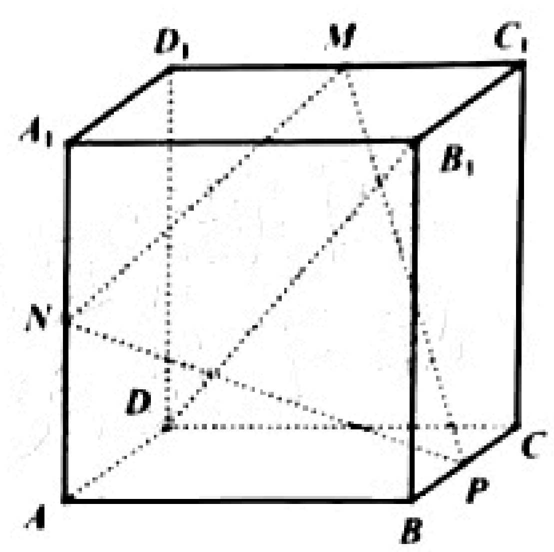
12．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知M,N,P分别是棱C_1D_1，AA_1，BC的中点，Q为平面PMN上的动点，且直线QB_1与直线DB_1的夹角为$30°$，则

A．$DB_1\perp$平面PMN

B．平面PMN截正方体所得的截面面积为$3\sqrt{3}$

C．点Q的轨迹长度为π

D．能放入由平面PMN分割该正方体所成的两个空间几何体内部（厚度忽略不计）的球的半径的最大值为$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$



三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点M在C上，$MF\perp x$轴，若$\triangle OFM$（O为坐标原点）的面积为2，则$p=$__________．

14．$(2x^2+x-y)^5$的展开式中x^5y^2的系数为__________（用数字作答）．

15．已知三棱锥$P-ABC$的四个顶点均在同一球面上，$PC\perp$平面ABC，$PC=BC=\sqrt{6}$，$AB=2\sqrt{6}$，且PA与平面ABC所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，则该球的表面积为__________．

16．已知函数$f(x)=e^{2x}-2a(x-2)e^x-a^2x^2\ (a>0)$恰有两个零点，则$a=$__________．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10分）

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2a_n-1$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

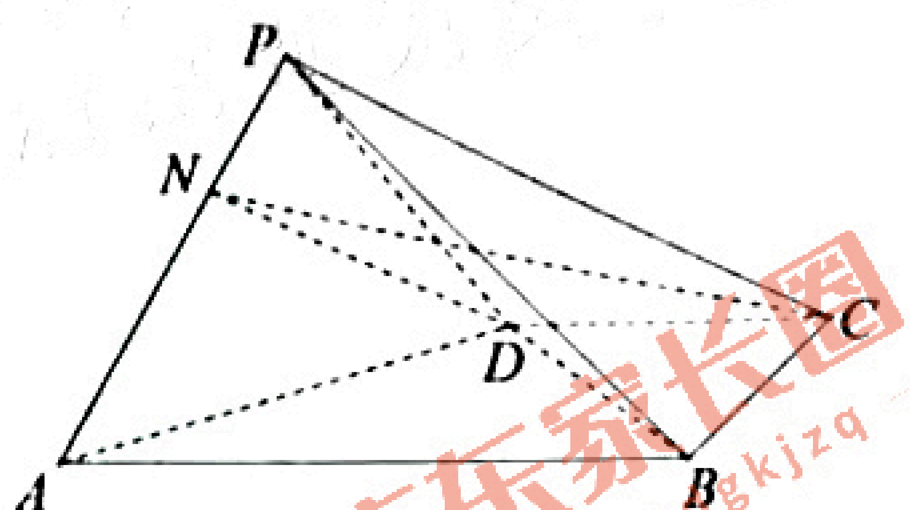
（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\begin{cases}\log_2 a_n, & n\text{为奇数},\\ a_n, & n\text{为偶数},\end{cases}$求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}$．

18.（12分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$CD\,/\!/\,AB$，$\angle ABC=90°$，$AB=2BC=2CD=4$，三棱锥$B-PAD$的体积为$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$．

（1）求点P到平面$ABCD$的距离；

（2）若$PA=PD$，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，点N在线段AP上，$AN=2NP$，求平面NCD与平面$ABCD$夹角的余弦值．



19.（12分）

记△ABC的内角A，B，C的对边分别为a,b,c，

已知$b\sin B+c\sin C-a\sin A=2b\sin B\sin C$且$C\neq\dfrac{\pi}{2}$．

（1）求证：$B=A+\dfrac{\pi}{2}$；

（2）求$\cos A+\sin B+\sin C$的取值范围．

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x+2)\ln(x+1)-ax$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

（2）当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$，求 a 的取值范围.

21.（12 分）

杭州亚运会的三个吉祥物是琮琮、宸宸和莲莲，他们分别代表了世界遗产良渚古城遗址、京杭大运河和西湖，分别展现了不屈不挠、坚强刚毅的拼搏精神，海纳百川的时代精神和精致和谐的人文精神．甲同学可采用如下两种方式购买吉祥物，方式一：以盲盒方式购买，每个盲盒 19 元，盲盒外观完全相同，内部随机放有琮琮、宸宸和莲莲三款中的一个，只有打开才会知道买到吉祥物的款式，买到每款吉祥物是等可能的；方式二：直接购买吉祥物，每个 30 元.

（1）甲若以方式一购买吉祥物，每次购买一个盲盒并打开．当甲买到的吉祥物首次出现相同款式时，用 X 表示甲购买的次数，求 X 的分布列；

（2）为了集齐三款吉祥物，甲计划先一次性购买盲盒，且数量不超过 3 个，若未集齐再直接购买吉祥物，以所需费用的期望值为决策依据，甲应一次性购买多少个盲盒？

22.（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，点 $F(-\sqrt{3},0)$，点 $P(x,y)$ 是平面内的动点．若以 PF 为直径的圆与圆 $O: x^2+y^2=4$ 内切，记点 P 的轨迹为曲线 E.

（1）求 E 的方程；

（2）设点 $A(0,1)$，$M(t,0)$，$N(4-t,0)$ $(t\neq 2)$，直线 AM, AN 分别与曲线 E 交于点 S,T（S,T 异于 A），$AH\perp ST$，垂足为 H，求 $|OH|$ 的最小值.